Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

1. Drehe die Gerade g mit $y = x - 3$ um O(0/0) mit $\alpha = 45°$. Bestimme die Gleichung der Bildgeraden g'. Berechne das Maß des Winkels zwischen g und g'.

2. Die Gerade g mit $y = -x + 5$ soll um O(0/0) so gedreht werden, dass die Bildgerade parallel zur x-Achse ist. Bestimme die Gleichung der Bildgeraden sowie das Maß des Drehwinkels (zwei Lösungen).

3. Auf der Normalparabel mit $y = -x^2 + 8x - 10$ wird ein Punkt A gesucht. Er soll Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks ABO sein, wobei O(0/0) und B ein Punkt der y-Achse sein soll. Das gleichschenklige Dreieck hat an der Spitze O das Innenwinkelmaß 45°. Bestimme die Koordinaten von B zeichnerisch und rechnerisch.

4.1 Zeige, dass der Punkt A(4/3) durch Drehung um O(0/0) auf den Punkt A'(-3/-4) abgebildet werden kann. Bestimme die Abbildungsgleichung der Drehung und das Drehwinkelmaß α.

4.2 Gleiche Aufgabenstellung wie 4.1, aber mit A'(0/-5).

5. Gegeben sind die Geraden g mit $y = -x + 5$ und h mit $x = -2$. Gesucht sind zwei Punkte $A \in g$ und $B \in h$ so, dass ΔOAB gleichschenklig-rechtwinklig mit der Spitze O(0/0) wird. Zeichnung !

6. Gegeben ist Q(5/4). Gesucht ist die dritte Ecke R eines gleichseitigen Dreiecks OQR mit O(0/0). Zeichnung !

7.0 Gegeben sind die Geraden g_1 durch $y = x + 3$ und g_2 durch $y = -x + 5$.
Gesucht ist eine Gerade g_3 durch O(0/0), so dass die durch g_1 und g_2 aus g_3 ausgeschnittene Strecke durch O halbiert wird.

7.1 Löse die Aufgabe konstruktiv.
Hinweis: Führe eine Punktspiegelung von g_1 und g_2 an O durch!

7.2 Berechne die Gleichung von g_3.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

8.0 Gegeben ist der Punkt P(5/0).

8.1 Berechne die Koordinaten seines Bildpunktes P' in Abhängigkeit vom Maß α des Drehwinkels bei einer Drehung um O(0/0).

8.2 Stelle die Entfernung $e(\alpha) = \overline{PP'}$ in Abhängigkeit von α dar.
[Ergebnis: $e(\alpha) = (5\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$ cm]

8.3 Für welchen Wert von α ist ein Minimum, für welchen ein Maximum für den Graphen von $e(\alpha)$ zu erwarten ? Welche Wertemenge ergibt sich für $e(\alpha)$? Begründung !

8.4 Welche Symmetrie ist zu erwarten? Begründung !

8.5 Tabellarisiere $e(\alpha)$ mit $\Delta\alpha = 10°$ in einem sinnvollen Intervall. Stelle nun $e(\alpha)$ graphisch dar.

9.0 Das Dreieck ABC mit A(-3/-3,5), B(4/0,5) und C(-3/1,5) wird an der Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x$ gespiegelt.

9.1 Zeichne die Dreiecke ABC und A'B'C' sowie die Spiegelachse g im Koordinatensystem.

9.2 Gib die Abbildungsvorschrift an, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C'.
[Ergebnis: A'(1/4,5); B'(2/-3,5); C'(-3/1,5)]

9.3 Zeige rechnerisch, dass sich die Strecken [AB] und [A'B'] auf der Geraden g schneiden, und begründe dies geometrisch.

9.4 Das Ergebnis 9.2 zeigt, dass der Punkt C ein Fixpunkt ist. Weise dies auf andere Weise nach.

10.0 Das Dreieck ABC mit A(2/-1) und C(4/3) wird um den Ursprung O(0/0) mit dem Drehwinkel φ auf das Dreieck A'B'C' mit B'(2/6) und C'(0/5) abgebildet.

10.1 Ermittle den Drehwinkel φ zeichnerisch und rechnerisch.
Gib die Abbildungsgleichung an, und berechne die Koordinaten der Punkte A' und B.
[Ergebnis: $\varphi = 53{,}13°$; A'(2/1); B(6/2)]

10.2 Berechne die Winkel BAC und B'A'C', und zeige, dass sie gleich groß sind.

10.3 Zeige, dass sich die Geraden BC und B'C' unter dem Drehwinkel φ schneiden.

10.4 Das Dreieck ABC wird gegen den Uhrzeigersinn um O(0/0) gedreht, so dass der Punkt B'' auf der x-Achse liegt. Berechne den Drehwinkel ε sowie die Koordinaten der Bildpunkte A'' und C''.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

11.0 Die Punkte A(-3/-4,5), B(4/1) und C(3/4,5) sind Eckpunkte eines Drachenvierecks ABCD. Symmetrieachse ist AC.

11.1 Zeichne das Drachenviereck ABCD (Platzbedarf: $-4 \le x \le 5; \quad -5 \le y \le 5$).

11.2 Berechne die Koordinaten des Eckpunktes D.

11.3 Welche Bedingung müssen die Koordinaten der Punkte $B_r(x/y)$ erfüllen, so dass die Drachenvierecke AB_rCD_r Rauten sind?

(Ergebnis: $y = -\frac{2}{3}x$)

11.4 Berechne mit Hilfe des Ergebnisses in 11.3 die Koordinaten des Punktes D_r der Raute AB_rCD_r mit $B_r(6/y)$.

11.5 Zeige rechnerisch, dass die Rauten AB_rCD_r in 11.3 auch zur Geraden B_rD_r symmetrisch sind.

12.0 Die Punkte B(4/-3) und D(0/5) sind Eckpunkte des gleichschenkligen Trapezes ABCD. Seine Symmetrieachse $m_{[AB]}$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x$.

12.1 Zeichne das Trapez ABCD im Koordinatensystem und berechne die Koordinaten der Punkte A und C.

[Ergebnis: A(-4/3); C(4,8/1,4)]

12.2 Zeige rechnerisch, dass der Mittelpunkt $M_{[BC]}$ des Schenkels [BC] auf den Mittelpunkt $M_{[AD]}$ des Schenkels [AD] gespiegelt wird, und begründe dies mit Hilfe der Satzgruppe der Achsenspiegelung.

13.1 Bilde das Dreieck ABC mit A(-1/-2), B(2/-1) und C(1/2) durch Punktspiegelung an Z_1(-1/2) ab. Fertige eine Zeichnung an, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte A', B', C' (Platzbedarf: $-5 \le x \le 7; \quad -3 \le y \le 7$).

[Ergebnis: A'(-1/6); B'(-4/5); C'(-3/2)]

13.2 Bilde das Dreieck A'B'C' aus 13.1 durch Punktspiegelung an Z_2(1/4) ab. Zeichne das Bilddreieck A'B'C' in die Zeichnung zu 13.1 ein, und berechne die Koordinaten der Punkte A'', B'' und C''.

13.3 Zeige rechnerisch, dass die Verknüpfung der Punktspiegelungen in 13.1 und 13.2 durch eine Parallelverschiebung ersetzt werden kann. Berechne die Koordinaten des Verschiebungsvektors.

14. Der Winkel BAC im Dreieck ABC mit A(0/0), B(5/2) hat das Maß $\alpha = 50°$. Der Eckpunkt C liegt auf der Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

Berechne die Koordinaten des Eckpunktes $C(x/-\frac{1}{2}x + 7)$.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

15. Im Dreieck ABC gilt A(0/4), C(1/6) sowie $\sphericalangle ACB = 72°$. Der Punkt B liegt auf der Geraden g mit $y = 2x - 8$. Berechne die Koordinaten von B.

16. Der Eckpunkt C des Dreiecks ABC mit A(-1/-2), B(6/0) und $\sphericalangle BAC = 55°$ liegt auf der Parabel p mit $y = x^2 - 6x + 13$. Welche Koordinaten hat C ?

17.0 Das Dreieck ABC mit A(2/-1,5), B(5/-1,5) und C(3/1) wird an der Geraden g_1 mit $y = \frac{1}{2}x$ gespiegelt, das Bilddreieck A'B'C' danach an der Geraden g_2 mit $y = -2x$.

17.1 Fertige eine Zeichnung an (Platzbedarf: $-6 \le x \le 6; \quad -2 \le y \le 6$).

17.2 Berechne die Koordinaten der Bildpunkte A', B', C', A'', B'', C''.

17.3 Durch welche Abbildung kann man die beiden Spiegelungen ersetzen ?
Gib die Abbildungsgleichung an.

17.4 Welche Bedeutung hat der Winkel, den die beiden Achsen g_1 und g_2 miteinander bilden für die Ersatzabbildung ?

17.5 Welches Ergebnis erhält man, wenn man das Dreieck ABC aus 17.0 zuerst an g_2 und dann an g_1 spiegelt ?

18.0 Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-1/2), B(4/1), C(3/5). Es soll durch zentrische Streckung mit Z_1(0/4) und k_1 = -0,5 abgebildet werden. Das Bilddreieck A'B'C' soll noch einmal durch zentrische Streckung mit Z_2(-0,5/6,5) und k_2 = 4 abgebildet werden.

18.1 Zeichne das Dreieck ABC sowie die beiden Bilddreiecke A'B'C' und A''B''C'' (Platzbedarf: $-7 \le x \le 5; \quad -6 \le y \le 7$).

18.2 Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der beiden Bilddreiecke.

18.3 Zeige, dass man die beiden zentrischen Streckungen durch eine neue zentrische Streckung mit dem Zentrum Z* und dem Streckungsfaktor k* ersetzen kann.
Ermittle Z* und k* zeichnerisch und rechnerisch, und gib die Abbildungsgleichung an.
(Teilergebnis: Z*(0,5/1,5); k* = -2)

18.4 Berechne mit Hilfe der Abbildungsgleichung in 18.3 aus den Koordinaten der Punkte A, B, C die Koordinaten der Eckpunkte A'', B'', C''.

18.5 Zeige, dass die drei Streckungszentren Z_1, Z_2 und Z* auf einer Geraden liegen.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

19.0 Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit A(0/0).
Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g: y = -2.
Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung; $-6 \le x \le 8$; $-6 \le y \le 6$

19.1 Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für
$B_1(-4/-2)$; $B_2(-2/-2)$; $B_3(4/-2)$

19.2 Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung
y = 0,5x + 1. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0.

19.3 Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt
$6\sqrt{3}$ FE besitzt.

19.4 Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck.
Berechne den Flächeninhalt A_{min} dieses Dreiecks.

20.0 Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit A(0/0).
Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g: x = 4.
Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung; $-3 \le x \le 8$; $-6 \le y \le 7$

20.1 Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für
$B_1(4/-5)$; $B_2(4/-3)$; $B_3(4/3)$

20.2 Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung
y = 0,5x + 1. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0.

20.3 Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt
$5\sqrt{3}$ FE besitzt.

20.4 Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck.
Berechne den Flächeninhalt A_{min} dieses Dreiecks.

21.0 Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit A(0/0).
Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g: $y = \sqrt{3} \cdot x - 1$.
Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung; $-5 \le x \le 5$; $-6 \le y \le 8$

21.1 Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für
$B_1(-2/?)$; $B_2(-0,5/?)$; $B_3(4/?)$

21.2 Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung
y = 0,5x + 1. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0.

21.3 Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt
$9\sqrt{3}$ FE besitzt.

21.4 Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck.
Berechne den Flächeninhalt A_{min} dieses Dreiecks.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

22. Die gleichschenkligen Dreiecke AB_nC_n mit A(0/0), $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$ und $\sphericalangle B_nAC_n = \alpha$ bilden eine Dreiecksschar. Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g.
Fertige jeweils eine Zeichnung an, und ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte C_n. Berechne sodann die Eckpunktskoordinaten der Schardreiecke AB'C', deren Eckpunkt C' auf der Parabel p liegt.

a) $\alpha = 45°$; g: $y = -x + 4\sqrt{2}$; p: $y = x^2 - 2x - 4$

b) $\alpha = 90°$; g: $y = -2x - 3$; p: $y = -x^2 + 5$

c) $\alpha = 120°$; g: $x = -4$; p: $y = -x^2 + 4x - 2$

23. Der Punkt C(0/0) ist Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken mit $\sphericalangle ACB = 135°$ (90°) und $\overline{AC} = \overline{BC}$, deren Eckpunkte A und B auf den Geraden g_1 mit $y = \frac{1}{2}x - 4$ und g_2 mit $y = 2x + 4$ liegen.

a) $A \in g_1 \wedge B \in g_1$

b) $A \in g_2 \wedge B \in g_2$

c) $A \in g_1 \wedge B \in g_2$

d) $A \in g_2 \wedge B \in g_1$

Konstruiere die Dreiecke, und berechne sodann die Koordinaten der Punkte A und B auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

24.1 Die Punkte A(-2/3) und C(6/-3) sind Eckpunkte von Parallelogrammen AB_nCD_n bzw. AD_nCB_n, die [AC] als gemeinsame Diagonale besitzen. Die Eckpunkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 3x - 1$. Trage die Punkte A und C, die Gerade g und die auf g liegenden Punkte $D_1(1/y_1)$ und $D_2(-1{,}5/y_2)$ in ein Koordinatensystem ein, und zeichne sodann die Parallelogramme AB_1CD_1 und AD_2CB_2.

24.2 Begründe, dass für die Punkte B_n die Gleichung $\overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{D_nC}$ und $D_n \xrightarrow{M} B_n$ mit M als Mittelpunkt der Strecke [AC] gilt. Berechne mit beiden Abbildungen die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte $B_{n'}$ und zeichne ihn in das Diagramm zu 24.1 ein.

24.3 Prüfe, ob es unter den Parallelogrammen AB_nCD_n bzw. AD_nCB_n Rechtecke und Rauten gibt, berechne gegebenenfalls die Koordinaten der Eckpunkte $D_{n'}$ und trage diese Parallelogramme in die Zeichnung zu 24.1 ein.

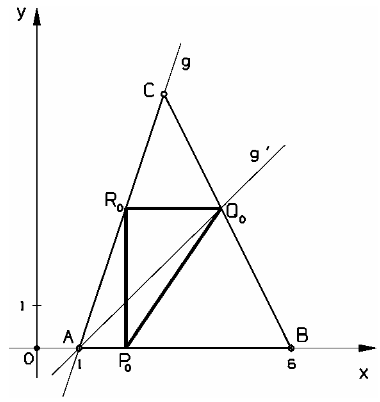
24.4 Für welche Parallelogramme AB_nCD_n gilt $\overline{AD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{D_nC}$?
Berechne die Koordinaten der Punkte $D_{n'}$.

25. Das Dreieck ABC mit A(2/5), B(5/2) und C(7/7) und die Gerade g mit $y = 3x$ sind gegeben. Es gibt Rauten, deren eine Diagonale auf g liegt und doppelt so lang wie die andere Diagonale ist, die einen Punkt auf einer Seite des Dreiecks ABC mit einem Punkt auf der y-Achse verbindet.
Konstruiere die Rauten, und berechne dann die Koordinaten ihrer Eckpunkte.
Platzbedarf: $-3 \le x \le 8$; $-1 \le y \le 13$

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

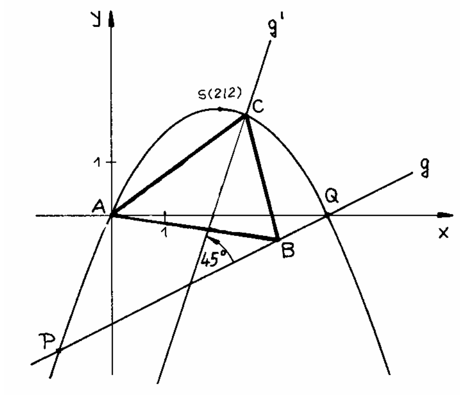
26. Es sind ein Dreieck ABC mit A(1/0), B(6/0), C(3/6) und eine Schar ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke $P_nQ_nR_n$ mit $\overline{P_nR_n} : \overline{R_nQ_n} = 3:2$ und $\sphericalangle P_nR_nQ_n = 90°$ gegeben. Die Eckpunkte R_n liegen auf der Geraden AC = g; die Seiten $[P_nR_n]$ stehen auf der x-Achse senkrecht.
Ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte Q_n. Berechne sodann die Koordinaten der Eckpunkte des Schardreiecks $P_0Q_0R_0$, das dem gegebenen Dreieck ABC einbeschrieben ist.
Lösungshinweis: $g \xrightarrow{x\text{–Achse};\ \varphi} g'$; $\tan\varphi = -\frac{2}{3}$



27. Zwischen der Parabel p mit $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ und der Geraden g = PQ mit P(-1/-2,5) und Q(4/0) ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit A(0/0) und $\sphericalangle BAC = 45°$ einbeschrieben.

a) Ermittle zunächst die Gleichung der Geraden g' und berechne damit die Koordinaten der Eckpunkte B und C.

b) Begründe sodann, dass $\overline{AB} \xrightarrow{A;\ \varphi=45°} \overline{AC}$ und somit $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \frac{1}{2}\overline{x} - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A;\ \varphi=45°} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{pmatrix}$ gilt und berechne so die Koordinaten der Punkte $B(\overline{x} / \frac{1}{2}\overline{x} - 2)$ und $C(x / -\frac{1}{2}x^2 + 2x)$.



28. Dem Bereich mit $y \geq 0 \wedge y \geq -2x - 10 \wedge y \leq -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ sollen Drachenvierecke AB_nCD_n einbeschrieben werden, so dass $B_n \in p$ mit $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ und $D_n \in g$ mit $y = -2x - 10$ gilt. Die Punkte A(0/0) und C(-6/3) liegen auf der gemeinsamen Symmetrieachse der Vierecke.
Konstruiere die Drachenvierecke, und berechne die Koordinaten der Punkte B_n und D_n auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.
Für die Zeichnung: $-9 \leq x \leq 1$; $\quad -1 \leq y \leq 6$

29. Die Parabeln p_1 mit $y = x^2 + 2x - 1$ und p_2 mit $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3$ schneiden sich in den Punkten A und B. Der Punkt A ist Büschelpunkt eines Geradenbüschels. Berechne die Koordinaten der Schnittpunke A und B und ermittle die Gleichung der Büschelgeraden, aus der beide Parabeln gleichzeitig Sehnen ausschneiden, deren Längen sich wie 2:1 verhalten.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

30.1 Die Eckpunkte C_n der Dreiecke ABC_n mit A(0/0) und B(6/0) liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 6$. Ermittle die Gleichung der Trägergraphen der Mittelpunkte der Seiten $[AC_n]$ und $[BC_n]$ sowie der Schwerpunkte der Dreiecke ABC_n.

30.2 Eines der Dreiecke ABC_n besitzt den kleinsten möglichen Umfang. Berechne die Koordinaten des zugehörigen Eckpunktes C_n.

31. Eine Dreiecksschar besteht aus gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit A_n(x/0), C_n(x/2x+2) und $\overline{A_nB_n} = \overline{B_nC_n}$. Zeichne die Schardreiecke für $x \in \{-2{,}5;\ 1;\ 3\}$ in ein Koordinatensystem, und ermittle die Gleichungen der Trägergraphen der Mittelpunkte M_n der Seiten $[A_nC_n]$ und der Eckpunkte B_n. Berechne sodann die Koordinaten des dem Dreieck PQR mit P(-1/0), Q(7,5/0) und R(4/10) einbeschriebenen Schardreiecks $A_0B_0C_0$.

32. Die ähnlichen Dreiecke P_nQR_n mit Q(0/0), $P_n(x/-\frac{1}{2}x+5)$, $\sphericalangle R_nQP_n = 90°$ und $\overline{P_nQ} : \overline{R_nQ} = 2:1$ bilden eine Dreiecksschar. Auf welchem geometrischen Ort liegen alle Eckpunkte R_n ? Ermittle seine Gleichung. Welches Schardreieck besitzt den kleinsten Flächeninhalt ?

33. Der Punkt A(0/0) ist Eckpunkt eines Quadrates ABCD mit C(-3/?) und D(x/x-4). Konstruiere das Quadrat und berechne die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D. Platzbedarf: $-5 \le x \le 7;\quad -6 \le y \le 4$

34.0 Das Dreieck ABC mit A(-1,5/2), B(1/-0,5) und C(2,5/5) soll durch Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden so abgebildet werden, dass der Punkt A' auf der x-Achse liegt.

34.1 Ermittle zeichnerisch die beiden möglichen Spiegelachsen g_1 und g_2 sowie die beiden Bilddreiecke.

34.2 Ermittle rechnerisch die Spiegelungsmatrizen, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte.

34.3 Gib die Gleichungen der beiden Spiegelachsen g_1 und g_2 an, und bestätige mit ihrer Hilfe, dass einmal der Punkt C, das andere Mal der Punkt B ein Fixpunkt ist.

34.4 Zeige, dass die beiden Spiegelachsen g_1 und g_2 senkrecht aufeinander stehen, und begründe dies.

34.5 Zeige rechnerisch, dass man das Dreieck A'B'C' durch eine Punktspiegelung am Ursprung O(0/0) auf das Dreieck A''B''C'' abbilden kann. Begründe dies.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

35.0 Die Punkte A(x/0) mit $x \in \mathbb{R}^+$, B(6/4) und C sind die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken ABC mit der Basis [AC] und mit OB als Symmetrieachse.

35.1 Zeichne die Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2 und A_3BC_3 mit $x \in \{2;\ 3{,}5;\ 6\}$ in ein Koordinatensystem.

35.2 Berechne die Koordinaten der Punkte C für die in 35.1 gezeichneten Dreiecke.

35.3 Die Punkte A_n beschreiben eine Strecke, die auf der x-Achse liegt. Bestimme das Intervall für x. Ermittle rechnerisch die Gleichung der Geraden, auf der die Punkte C liegen, und gib auch für deren Rechtswerte ein Intervall an.

35.4 Ermittle x, so dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und berechne die Koordinaten von C.

35.5 Ermittle x, so dass das Dreieck ABC gleichseitig ist, und berechne die Koordinaten von C.

35.6 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A_0BC_0 mit A_0(2,5/0), und ermittle die Koordinaten des Dreiecks A_4BC_4, das den gleichen Flächeninhalt besitzt.

36.0 Gegeben sind die Punkte A(x/-1) und B(0/10-x) mit $0 \leq x < 10$ und $x \in$ R.
Die Punkte B werden an der Geraden g mit $y = -\frac{2}{3}x$ gespiegelt. Es entstehen Dreiecke ABB'.

36.1 Zeichne die Dreiecke ABB' für $x \in \{5;\ 7{,}5;\ 9\}$ in ein Koordinatensystem.

36.2 Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der in 36.1 gezeichneten Dreiecke ABB'.

36.3 In der Schar der Dreiecke ABB' gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit [BB'] als Basis. Berechne die Koordinaten seiner Eckpunkte.

36.4 Berechne die Belegung für x, mit der sich ein gleichschenkliges Dreieck mit [B'A] als Basis ergibt.

36.5 In der Schar der Dreiecke ABB' gibt es ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse [B'A]. Berechne die Koordinaten seiner Eckpunkte.

36.6 Gib die Koordinaten der Punkte B' in Abhängigkeit von x an.
[Ergebnis: B'(0,9x-9,2/0,4x-3,8)]

36.7 Bestimme mit Hilfe des Ergebnisses in 36.6 den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABB' in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: A(x) = ($-0{,}2x^2 - 2{,}8x + 50{,}6$) FE]

36.8 Welche Belegung für x ergibt das flächengrößte Dreieck ?

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

37.0 Die Dreiecke ABC mit A(1/-1), B(2/0), C(-1/3) und A'B'C' mit A'(1/0,5), B'(3,5/3), C'(-4/10,5) sind gegeben.

37.1 Zeichne die Dreiecke ABC und A'B'C' in ein Koordinatensystem.

37.2 Zeige, dass man das Dreieck ABC durch zentrische Streckung auf das Dreieck A'B'C' abbilden kann. Ermittle rechnerisch das Streckungszentrum Z und den Streckungsfaktor k.

37.3 Das Dreieck ABC soll von Z(1/-2) aus gestreckt werden, so dass der Mittelpunkt M'' der Dreiecksseite [B''C''] auf der y-Achse liegt. Berechne den Streckungsfaktor k'' und die Koordinaten der Eckpunkte A'', B'', C''.

37.4 Die Eckpunkte der Dreiecke ABC, A'B'C' und A''B''C'' liegen jeweils auf einer der Parabeln p, p', p''. Bestimme die Parabelgleichungen, und zeichne die Parabeln in die Zeichnung zu 37.1 ein.

37.5 Ermittle den Streckungsfaktor k*, so dass das Dreieck A*B*C* den Flächeninhalt A = 35 FE erhält.

38.0 Punkte B(x/y) auf der Geraden g mit der Gleichung y = - 2x + 16 legen zusammen mit den Punkten O(0/0) und A(x/0) für $x \in]0;\ 8[$ eine Schar von rechtwinkligen Dreiecken OAB fest. Der Winkel AOB hat das Maß α mit $\alpha \in]0°;\ 90°[$.

38.1 Zeichne die Gerade g sowie die Dreiecke OA_1B_1 für $A_1(6/0)$, OA_2B_2 für $\alpha = 75°$ und OA_3B_3 für $B_3(x_3/13)$ in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit. Berechne jeweils α in den Dreiecken OA_1B_1und OA_3B_3.

38.2 Zeige, dass zwischen dem Abszissenwert x der Dreieckseckpunkte A bzw. B und α die Beziehung $x = \dfrac{16}{2 + \tan\alpha}$ besteht und berechne die Koordinaten der Punkte A_2 und B_2.

38.3 Bestätige durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke OAB in Abhängigkeit von α gilt: $A(\alpha) = 128 \cdot \dfrac{\tan\alpha}{(2 + \tan\alpha)^2}\,\text{cm}^2$.

38.4 Ermittle α und dann die Koordinaten der Dreieckseckpunkte A und B im Falle $A = \dfrac{128}{9}\,\text{cm}^2$. Auf welche Dreieckssonderform gelangt man dabei ?

38.5 Bestätige durch Rechnung die folgenden Termumformungen:

a) $$\frac{\tan\alpha}{(2 + \tan\alpha)^2} = \frac{1}{\frac{4}{\tan\alpha} + \tan\alpha + 4} = \frac{1}{\left(\frac{4}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right) + 4}$$

b) $$\frac{4}{\tan\alpha} + \tan\alpha = \tan\alpha + \frac{4}{\tan\alpha} = \left(\sqrt{\tan\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\tan\alpha}}\right)^2 + 4 = T(\alpha)$$

38.6 Für welchen Winkel α_0 nimmt der Term $T(\alpha)$ einen minimalen Wert an?

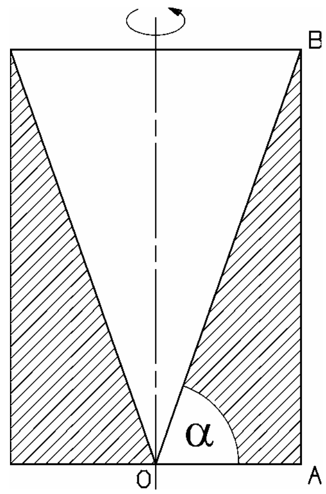
Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

38.7 Begründe, dass für α_0 das zugehörige Dreieck OA_0B_0 unter allen Dreiecken OAB den größten Flächeninhalt besitzt, und gib diesen an. Berechne die Koordinaten der Punkte A_0 und B_0, und zeichne das Dreieck OA_0B_0 ein.

38.8 Zeichne das Dreieck OA*B* ein, das unter allen Dreiecken OAB die kürzeste Hypotenuse besitzt, und berechne α^* sowie die Koordinaten der Punkte A* und B*.

38.9 Von welcher Art sind die Rotationskörper, die entstehen, wenn die Dreiecke OAB um die y-Achse rotieren ?
Siehe dazu nebenstehende Skizze,



38.10 Bestätige, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von α gilt:
$V = \frac{8192}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\tan\alpha}{(2+\tan\alpha)^3} \text{cm}^3$.

38.11 Stelle zu V eine numerische Wertetabelle auf $(\Delta\alpha = 5°)$, und zeichne den Graphen zu V. Wähle auf der α-Achse 1 cm für 10°, auf der V-Achse 1 cm für 20 cm^3.

38.12 Entnimm dem Graphen in 38.11 den Wert α, der zum volumengrößten Rotationskörper gehört.
Nimm Stellung zu der Aussage: „Der zum flächengrößten Dreieck OAB gehörende Rotationskörper hat das größte Volumen“.

39. Dem durch $y \le \sqrt{3}(x-3)+6 \wedge y \le -\sqrt{3}(x-3)+6 \wedge y \ge 0$ beschriebenen Bereich sollen ein gleichseitiges Dreieck ABC und ein gleichschenkliges Dreieck AB_0C_0 mit $\sphericalangle B_0AC_0 = 45°$ und A(0/0) einbeschrieben werden.
Zeichne den gegebenen Bereich in ein Koordinatensystem, und ermittle die gesuchten Dreiecke zunächst geometrisch. Berechne sodann die Koordinaten der Eckpunkte B, C, B_0 und C_0 auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

40. Auf der Parabel p mit $y = x^2 - 6x + 12$ liegen die Eckpunkte C_n der Dreiecke AB_nC_n mit A(-3/0), B(x/0) und $C_n(x/x^2 - 6x + 12)$. Ermittle die Gleichungen der geometrischen Ortslinien der Mittelpunkte M_n der Seiten $[B_nC_n]$ und der Dreiecksschwerpunkte S_n.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

41.1 Bei einer Abbildung werden die Punkte P(x/y) auf die Punkte P'(x+2y/y) abgebildet. Zeige, dass diese Abbildung geradentreu ist, und gib ihre Abbildungsvorschrift in der Matrixschreibweise an.

41.2 Die Eckpunkte D_n(x/x+3) einer Schar von Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$ mit A_n(x/0) werden durch die in 41.1 gegebene Abbildung auf die Eckpunkte C_n abgebildet.
Zeichne die Rechtecke für $x \in \{-2; -1; 2\}$ in ein Koordinatensystem, und ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n.
Platzbedarf: $-5 \le x \le 9$; $-2 \le y \le 9$

41.3 Das Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ der Rechtecksschar ist dem Dreieck PQR mit P(-3/0), Q(7,5/0) und R(4/7) einbeschrieben.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte dieses Rechtecks.

42. Das Dreieck ABC mit A(2/1), B(6/3) und C(5/6) wird auf das Dreieck A'B'C' mit A'(-1/2), B'(-3/6) und C'(-0,4/7,8) abgebildet. Ermittle die Abbildungsgleichung in der Matrixform, und gib an, um welche Abbildung es sich handelt. Welche Gerade ist Fixpunktgerade und welche Geraden sind Fixgeraden?

43. Die Gerade g_1 mit $y = \frac{4}{3}x + 3$ soll so gedreht werden, dass sie auf die Gerade g_2 mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x$ fällt. Dabei soll jedoch gleichzeitig der Punkt A_1(3/7) auf der Geraden g_1 auf den Punkt A_2(0/0) auf der Geraden g_2 abgebildet werden.
Berechne die Koordinaten des Drehzentrums und das Maß des Drehwinkels.

