

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 1.0** Bei den gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0|0)$ liegen die Fußpunkte E_n der jeweiligen Höhen von A auf $[B_nC_n]$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x + 8$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
- 1.1** Zeichnen Sie die Gerade g und die Dreiecke AB_1C_1 mit $E_1(-1,5 | y_1)$ und AB_2C_2 mit $E_2(1 | y_2)$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \leq x \leq 9$; $-1 \leq y \leq 12$
- 1.2** Die Punkte $E_n(x | 2x + 8)$ können durch zwei hintereinander ausgeführte Abbildungen auf die Punkte B_n abgebildet werden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte E_n .
Ergebnis: $B_n \left[x \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{3} \right) + \frac{8}{3} \sqrt{3} \mid x \left(2 - \frac{1}{3} \sqrt{3} \right) + 8 \right]$
- 1.3** Ermitteln Sie sodann durch Rechnung (auf zwei Stellen nach dem Komma runden) die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte B_n , und zeichnen Sie h in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.
- 1.4** Weisen Sie durch Rechnung nach (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), dass sich die Koordinaten der Mittelpunkte M_n der Strecken $[E_nB_n]$ wie folgt in Abhängigkeit von x darstellen lassen: $M_n(1,58x + 2,31 | 1,71x + 8)$
- 1.5** Unter den Dreiecken AB_nC_n besitzt das Dreieck AB_0C_0 die kleinstmögliche Höhe $\overline{AE_0}$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E_0 .
Bestimmen Sie sodann durch Rechnung die Koordinaten der Punkte B_0 und C_0 .
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)
- 2.0** Das gleichschenklige Trapez ABCD mit $[AB] \parallel [CD]$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Der Punkt E ist Mittelpunkt der Strecke [CD] und der Punkt F ist Mittelpunkt der Strecke [AB].
Gegeben sind: $\overline{AB} = 18$ cm, $\overline{CD} = 8$ cm, $\overline{EF} = 7$ cm.
Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt E mit $\overline{ES} = 12$ cm.
- 2.1** Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Dabei soll die Strecke [EF] auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = 0,5$; $\omega = 45^\circ$

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

2.2 Die Strecken $[EM_n]$ mit $M_n \in [FS]$ sind die Höhen von Trapezen DCQ_nP_n mit $P_n \in [AS]$ und $Q_n \in [BS]$. Das Maß der Winkel FEM_n ist φ mit $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$. Zeichnen Sie das Trapez DCQ_1P_1 für $\varphi = 75^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

2.3 Berechnen Sie die Streckenlänge $EM_n(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).

$$[\text{Ergebnis: } EM_n(\varphi) = \frac{6,05}{\sin(\varphi + 59,74^\circ)} \text{ cm}]$$

2.4 Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{SM_n}(\varphi)$ und sodann die Streckenlänge $\overline{P_nQ_n}(\varphi)$ jeweils in Abhängigkeit von φ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).

$$[\text{Teilergebnis: } \overline{P_nQ_n}(\varphi) = \frac{15,55 \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + 59,74^\circ)} \text{ cm}]$$

2.5 Unter den Trapezen DCQ_nP_n gibt es ein Rechteck DCQ_0P_0 . Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)

$$[\text{Ergebnis: } \varphi = 65,16^\circ]$$

3.0 Gegeben ist das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ und $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$. Punkte Q auf der Dreieckseite $[BC]$ bilden mit Punkten P jeweils Eckpunkte von Rechtecken $APQR$, wobei die Punkte P die Fußpunkte der Lote von Q auf $[AB]$ sind. Der Winkel PAQ hat das Maß φ mit $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

3.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC sowie das Rechteck $APQR$ für $\varphi = 30^\circ$.

3.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Streckenlängen $\overline{AQ}(\varphi)$ wie folgt in Abhängigkeit von φ darstellen lassen:

$$\overline{AQ}(\varphi) = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sin(\varphi + 45^\circ)} \text{ cm}$$

3.3 Die Rechtecke $APQR$ rotieren um AC als Achse. Ermitteln Sie die Mantelfläche $M(\varphi)$ der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } M(\varphi) = \frac{64 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^2(\varphi + 45^\circ)} \text{ cm}^2]$$

3.4 Die Dreiecke APQ rotieren ebenfalls um AC als Achse. Stellen Sie das Volumen $V(\varphi)$ der dabei entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ dar.

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{256 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{3 \cdot \sin^3(\varphi + 45^\circ)} \text{ cm}^3]$$

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 3.5** Berechnen Sie φ (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), so dass die Maßzahlen der Mantelfläche $M(\varphi)$ aus 3.3 und des Volumens $V(\varphi)$ aus 3.4 gleich sind.
[Ergebnis: $\varphi = 59,04^\circ$]
- 4.0** Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} 2 + 8 \cdot \cos \varphi \\ 2 + \cos \varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} -6 \cdot \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \\ 6 \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi = [0^\circ; 180^\circ]$ und $O(0|0)$.
- 4.1** Berechnen Sie für $\varphi \in \{0^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ\}$ die Koordinaten der jeweils zugehörigen Pfeile $\overrightarrow{OP_n}$ und $\overrightarrow{OQ_n}$ und zeichnen Sie die Pfeile in ein Koordinatensystem.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \leq x \leq 11$; $-7 \leq y \leq 7$
- 4.2** Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte P_n auf der Geraden g mit $y = \frac{1}{8}x + 1,75$ liegen.
Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung des Trägergraphen der Punkte Q_n .
- 4.3** Der positive Teil der x -Achse schließt mit einem der Pfeile $\overrightarrow{OP_n}$ einen Winkel mit dem Maß 60° ein.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
- 4.4** Zeigen Sie durch Rechnung, dass es kein gemeinsames Winkelmaß φ gibt, so dass $\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OQ_n}$ gilt.
- 4.5** Stellen Sie die Streckenlänge $\overline{OP}(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ dar.
Ermitteln Sie rechnerisch das Winkelmaß φ_0 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, so dass die Streckenlänge $\overline{OP}(\varphi)$ minimal ist.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 5.0** Die Pfeile $\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos \alpha \\ 1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin \alpha \\ 6 \cdot \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ legen für $\alpha \in]0^\circ; 180^\circ[$ die Eckpunkte von Dreiecken OP_nQ_n bzw. OQ_nP_n fest.
- 5.1** Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP_n}$ und $\overrightarrow{OQ_n}$ für $\alpha \in \{20^\circ; 50^\circ; 150^\circ\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann die zugehörigen Dreiecke OP_1Q_1 , OP_2Q_2 und OP_3Q_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leq x \leq 6$; $-1 \leq y \leq 7$
- 5.2** Stellen Sie den Flächeninhalt $A(\alpha)$ der Dreiecke OP_nQ_n in Abhängigkeit von α dar.
Berechnen Sie sodann das Winkelmaß α_0 (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), für das man das Dreieck OP_0Q_0 mit einem Flächeninhalt von 7 FE erhält.
(Zwischenergebnis: $A(\alpha) = (15 \cos^3 \alpha - 2) \text{ FE}$)
- 5.3** Ermitteln Sie die Gleichung des Graphen, auf dem die Eckpunkte Q_n liegen.
- 5.4** Für welche Winkelmaße α erhält man bei $O(0|0)$ rechtwinklige Dreiecke?
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
- 6.0** Der Graph von $f : y = 2^x - 4$ wird durch orthogonale Affinität auf den Graphen von $f_1 : y = 2^{x-2} + C$ abgebildet.
Bestimmen Sie den Orthogonalitätsfaktor k und die Konstante C .
(Zwischenergebnis: $C = -1$)
- 6.1** Welche Verschiebung des Graphen von f hätte ebenfalls den Graphen von f_1 ergeben?
- 6.2** Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f und f_1 .
- 6.3** Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion f_1^{-1} ?
- 6.4** Zeigen Sie, dass f_1^{-1} auf die Form $y = \log_2(4x + 4)$ gebracht werden kann.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 7.0** Der Graph von $f : y = \sqrt{3}^{x-4}$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist G .
- 7.1** Bringen Sie f auf die Form $y = a \cdot 3^{b \cdot x}$.
- 7.2** Der Graph G wird zunächst durch orthogonale Affinität mit $k = -3$ und dann mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf den Graphen G_1 abgebildet.
- 7.3** Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f_1 von G_1 .
(Ergebnis: $y = -\sqrt{3}^x + 4$)
- 7.4** Geben Sie die Definitionsmenge, Wertemenge und die Asymptotengleichung von f_1 an.
- 7.5** Tabellarisieren Sie f_1 für $x \in [-2; 4]$ mit $\Delta x = 1$ und zeichnen Sie G_1 in ein Koordinatensystem. 1 LE = 1 cm
- 7.6** Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G mit G_1 .
- 7.7** Geben Sie die nach y aufgelöste Gleichung der Umkehrfunktion von f_1 an.
- 7.8** Geben Sie die Definitionsmenge, Wertemenge und die Asymptotengleichung f_1^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen mit ins Koordinatensystem ein.
- 8.0** Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $y = \log_{1,5}(x-1) - 4$ ist Trägergraph der Eckpunkte C_n von gleichschenkligen Trapezen ABC_nD_n mit $A(-3|1), B(1|-3)$ und $\overline{BC_n} = \overline{AD_n}$. Außerdem gilt $x > 2$ und $x \in \mathbb{R}$ für die Abszisse x der Eckpunkte C_n .
($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)
- 8.1** Tabellarisieren Sie f für $x \in \{1,5; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f sowie die Trapeze ABC_1D_1 für $x = 3$ und ABC_2D_2 für $x = 8$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \leq x \leq 9$; $-7 \leq y \leq 9$
- 8.2** Berechnen Sie die Maße der Innenwinkel des gleichschenkligen Trapezes ABC_2D_2 .
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)
- 8.3** Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Gerade w mit der Gleichung $y = x$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) die Symmetrieachse der gleichschenkligen Trapeze ABC_nD_n ist. Ermitteln Sie sodann rechnerisch die nach y aufgelöste Gleichung des Trägergraphen h der Eckpunkte D_n , und zeichnen Sie w und h in das Koordinatensystem zu 8.2 ein.
- 8.4** Im gleichschenkligen Trapez ABC_3D_3 ist die Seite $[BC_3]$ parallel zur x -Achse. Berechnen Sie die x -Koordinate des Eckpunktes C_3 .

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 9.0** Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $y = 2^{x-2} - 1$ und f_2 mit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} + 3,5$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
- 9.1** Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge zu f_1 an.
- 9.2** Tabellarisieren Sie f_1 und f_2 für $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 5,5\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, und zeichnen Sie sodann die Graphen zu f_1 und zu f_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 6$; $-2 \leq y \leq 11$
- 9.3** Die Punkte $A_n(x | 2^{x-2} - 1)$ auf dem Graphen zu f_1 und die Punkte B_n auf dem Graphen zu f_2 sind die Endpunkte von Strecken $[A_n B_n]$. Die Abszisse der Punkte B_n ist dabei jeweils um 1 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n .
Zeichnen Sie für $x = 0$ die Strecke $[A_1 B_1]$ und für $x = 4$ die Strecke $[A_2 B_2]$ in das Koordinatensystem zu 9.2 ein.
Zeigen Sie sodann rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $B_n(x-1 | 2^{x-4} + 3,5)$.
- 9.4** Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Koordinaten der Mittelpunkte M_n der Strecken $[A_n B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
 $M_n(x-0,5 | 5 \cdot 2^{x-5} + 1,25)$
- 9.5** Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen zu f_1 und zu f_2 .
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)
[Ergebnis: $S(5,17 | 8)$]
- 10.0** Gegeben sind die Geraden g_1 mit $y = -2x - 3,5$; g_2 mit $y = \frac{4}{5}x - 3,5$ und g_3 mit $y = 5$.
- 10.1** Den Geraden ist ein gleichschenkliges Dreieck PQR einzubeschreiben, das folgende Bedingungen erfüllt:
- Der Koordinaten-Ursprung ist Mittelpunkt der Seiten \overline{PQ} .
- $\overline{PR} = \overline{QR}$
- $P \in g_1$; $Q \in g_2$; $R \in g_3$
Konstruieren Sie das Dreieck (gegebenenfalls mit Hilfe von Probierdreiecken).
- 10.2** Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P , Q , R durch Rechnung.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 11.0** Die Pfeile $\overrightarrow{OA_n} = \begin{pmatrix} 4 \cos \varphi \\ 4 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB_n} = \begin{pmatrix} -4 \cos \varphi \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ und $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$ spannen Dreiecke OA_nB_n auf.
- 11.1** Stellen Sie für $\varphi \in \{0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ\}$ eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie die Dreiecke in ein Koordinatensystem. 1 LE = 1 cm
- 11.2** Wie lauten die Gleichungen der Trägergraphen der Punkte A_n und B_n ?
- 11.3** Für welchen Wert von φ entsteht ein bei O rechtwinkliges Dreieck?
- 11.4** Für welchen Wert von φ sind die Pfeile \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} gleich lang?
- 11.5** Stellen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke als Funktion von φ dar.
- 11.6** Suchen Sie durch Tabellarisieren (Intervallschachtelung) das Maximum der Flächeninhalte.
- 12.0** Es gibt ein Quadrat ABCD, das folgende Bedingungen erfüllt: $A(0|0)$,
 $B \in g: y = \frac{1}{3}x - 3$, $C \in h: y = -x + 6$
- 12.1** Konstruieren Sie das Quadrat (gegebenenfalls mit Hilfe von Probierquadraten).
- 12.2** Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D.
- 13.0** Drachen AB_kCD_k sind wie folgt festgelegt: $A(0|0)$, $B_k(k|-2)$ mit $k > 0$ und $C(8|4)$. Symmetrieachse ist AC.
- 13.1** Zeichnen Sie die Drachen für $k_1 = 3$ und $k_2 = 7$ in ein Koordinatensystem.
- 13.2** Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte D_k in Abhängigkeit von k.
 Wie lautet die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_k ?
- 13.3** Für welche Werte von k entstehen bei B_k rechtwinklige Drachen?
 (Ergebnis: $k_1 = 2, k_2 = 6$)

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

- 13.4** Überprüfen Sie rechnerisch, welcher der Drachen von 13.3 gleichzeitig Quadrat ist.
- 13.5** Stellen Sie die Flächeninhalte der Drachen als Funktion von k dar.
- 14.0** Die Punkte O , $A_k(k | -0,5k - 1)$ mit $k > 0$ und $B(6|2)$ legen Drachen OA_kBC_k fest. Symmetrieachse ist OB .
- 14.1** Zeichnen Sie die Drachen für $k \in \{3, 4, 5\}$.
- 14.2** Wie lauten die Gleichungen der Trägergraphen der Punkte A_k und C_k ?
- 14.3** Für welche Werte von k entstehen bei A_k rechtwinklige Drachen?
- 14.4** Für welchen Wert von k entsteht eine Raute?
- 14.5** Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute.
- 14.6** Stellen Sie die Flächeninhalte der Drachen als Funktion von k dar.
- 15.0** Eine Schar von Parallelogrammen $OA_kB_kC_k$ ist festgelegt durch: $\overline{OA_k} = \begin{pmatrix} k \\ 0,5k - 3,5 \end{pmatrix}$
und $\overline{OB_k} = \begin{pmatrix} -k + 8 \\ k - 2 \end{pmatrix}$.
- 15.1** Legen Sie eine Wertetabelle an für $k \in \{-1; 2; 4\}$ und zeichnen Sie die Parallelogramme in ein Koordinatensystem.
- 15.2** Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C_k in Abhängigkeit von k und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte C_k an.
- 15.3** Berechnen Sie das Maß des Winkels C_2OA_2 .
- 15.4** Welche Werte von k liefern Rechtecke, Rauten und Quadrate?