Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

1.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/-4)$, $C(0/4)$, sowie die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha \\ 4\sin\alpha + 4 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [-90°;\ 90°]$.

1.1 Zeichne die drei Punkte B_1, B_2 und B_3 mit $\alpha \in \{-30°;\ 0°;\ 30°\}$ in ein KOS.

1.2 Zeige: $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha \\ 4\sin\alpha - 4 \end{pmatrix}$.

1.3 Zeige, dass für $\alpha \in [-90°;\ 90°]$ gilt: $[AB] \perp [CB]$.
Auf welcher Linie liegen also alle Punkte B ?

1.4 Bestimme die Koordinaten von B und den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α.

1.5 Für welches Winkelmaß α_0 wird die Dreiecksfläche am größten ? Gib diesen maximalen Inhalt an. Wie kann dieses Ergebnis auch durch geometrische Überlegungen gefunden werden ?

2.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6\sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ 6\sin^2\alpha \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $0° < \alpha < 90°$.

2.1 Zeichne die Pfeile für $\alpha \in \{30°; 45°; 60°\}$ in ein Koordinatensystem.

2.2 Im Punkt P wird jeweils die Senkrechte zu [OP] gezeichnet. Diese Senkrechte schneidet die positive x-Achse in T. Stelle die Koordinaten von T in Abhängigkeit von α dar.
[Ergebnis: $T(6\tan\alpha/0)$]

2.3 Für welches Winkelmaß α_4 ist $\overline{OP} = 3\text{cm}$?

2.4 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks OTP in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 18\tan\alpha \cdot \sin^2\alpha\ \text{cm}^2$]

2.5 Tabellarisiere $A(\alpha)$ mit $\Delta\alpha = 10°$ und zeichne den Graphen.

3.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5\cos\alpha \\ 5\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5\cos(\alpha + 90°) \\ 5\sin(\alpha + 90°) \end{pmatrix}$ mit $A(4/-3)$ und $0 \le \alpha \le 90°$.

3.1 Zeichne die Pfeile für $\alpha \in \{0°; 30°; 60°; 90°\}$ in ein Koordinatensystem.

3.2 Zeige, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ für alle Winkelmaße α orthogonal sind.

3.3 Zeige, dass ΔABD für alle Werte von α gleichschenklig ist mit [BD] als Basis.
Ergänze die Dreiecke ABD zu Quadraten ABCD und bestimme die Koordinaten von C in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $C(4 + 5\cos\alpha - 5\sin\alpha / -3 + 5\cos\alpha + 5\sin\alpha)$]

3.4 Für welchen Wert α_4 gilt $x_D = 4$?

3.5 Für welchen Wert α_5 liegt D auf der Geraden mit $y = -\frac{1}{3}x$?

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

4.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6\cos\alpha \\ 6\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3\cos\alpha \\ 3\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $A(0/0)$ und $\alpha \in [\,0°;\ 90°\,]$ gegeben.
Das Dreieck ABD wird zum Parallelogramm ABCD ergänzt.

4.1 Zeichne die Pfeile und die Parallelogramme für $\alpha \in \{30°; 45°; 60°\}$.
Auf welcher Ortslinie bewegen sich alle Punkte B bzw. D ?

4.2 Bestimme die kartesischen Koordinaten von C in Abhängigkeit von α.

4.3 Bestimme den Flächeninhalt A des Parallelogramms ABCD in Abhängigkeit von α.

4.4 Bestimme das Winkelmaß α_4, für das der Flächeninhalt des Parallelogramms $AB_4C_4D_4$ maximal wird. Zeige rechnerisch, dass das Parallelogramm mit $\alpha_2 = 45°$ ein Rechteck ist. Formuliere das Ergebnis als Satz.

5.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$, $B(8/0)$ und der Pfeil $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2\sin\alpha - 8 \\ \sin\alpha + 4 \end{pmatrix}$ mit $-90° \le \alpha \le 90°$.

5.1 Zeichne die Dreiecke ABC für $\alpha \in \{-90°; -30°; 0°; 60°; 90°\}$ in ein Koordinatensystem.

5.2 Berechne die Koordinaten von C in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $C(2\sin\alpha / \sin\alpha + 4)$]

5.3 Berechne die Gleichung des Trägergraphen aller Punkte C. Beachte dabei die Definitionsmenge !

5.4 Stelle den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α dar. Bestimme das Winkelmaß, für das der Flächeninhalt des Dreiecks extrem wird und gib den Inhalt an.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 4(\sin\alpha + 4)$ FE]

5.5 Für welche Winkelmaße wird der Flächeninhalt höchstens 18 cm^2 ?

5.6 Für welche Winkelmaße wird das Dreieck ABC rechtwinklig ?

6.0 Gegeben ist das Dreieck ABC (bzw. ACB) mit $A(0/0)$, $B(6/2)$ und $C(3\sin\alpha / 9\cos^2\alpha)$ mit $\alpha \in [90°; 270°]$.

6.1 Zeichne die Dreiecke ABC mit $\alpha \in \{90°; 120°; 160°\}$ in ein Koordinatensystem.

6.2 Berechne die Koordinaten des Punktes C_4 mit $\sphericalangle BAC_4 = 90°$.

6.3 Es gibt zwei gleichschenklige Dreiecke ABC mit [AB] als Basis.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte C_5 und C_6.

6.4 Bestimme die Gleichung des Trägergraphen aller Punkte C und zeichne den Graphen ein. Beachte dabei $\alpha \in [90°; 270°]$.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

6.5 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α.
[Ergebnis: $A(\alpha) = 3(9\cos^2\alpha - \sin\alpha)$ FE]

6.6 Bestimme das Maß α_7, für das $A = 27\frac{1}{12}$ cm^2 ist. Berechne die Koordinaten von C_7.

7.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8\tan\alpha \\ \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
O ist der Koordinatenursprung; $\alpha \in [\,0°;\ 90°\,]$.

7.1 Zeichne für $\alpha \in \{10°; 30°; 60°\}$ die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \le x \le 15$; $-1 \le y \le 10$

7.2 Bestimme durch Rechnung die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte A !

7.3 Für welche Werte für α stehen Pfeile $\overrightarrow{OA}$ senkrecht zu dem Pfeil $\overrightarrow{OB}$?

7.4 Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ spannen Parallelogramme OACB auf. Bestimme die Koordinaten vom Eckpunkt C in Abhängigkeit von α ! Ermittle durch Rechnung die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte C !

7.5 Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme OACB in Abhängigkeit von α !

7.6 Für welche Werte für α wird der Flächeninhalt 33 FE groß ?

7.7 Berechne das Maß des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ für $\alpha = 30°$!

8.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 4\cos^2\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $\alpha \in [0°; 180°]$.

8.1 Zeichne für $\alpha \in \{45°; 90°; 120°; 150°\}$ Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 2 cm; $-2 \le x \le 4$; $-1 \le y \le 9$

8.2 Bestimme die Gleichung der Ortslinie für alle Punkte B !

8.3 Für welchen Wert für α gibt es Pfeile $\overrightarrow{AB}$, die senkrecht zu $\overrightarrow{AD}$ stehen ?

8.4 Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ spannen Parallelogramme ABCD auf.
Bestimme die Ortslinie für alle Punkte C !

8.5 Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{AB}$ in Abhängigkeit von α ! Berechne sodann für $\alpha = 150°$ die zugehörige Pfeillänge !

8.6 Für welche Werte von α gibt es gleichlange Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$?

8.7 Berechne das Maß des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ für $\alpha = 45°$!

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

9.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\cos\alpha} \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5\cos\alpha \\ 5\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [\,0°;\ 90°\,]$ und $O(0/0)$ sind gegeben.

9.1 Gib die Gleichung der Ortslinie für die Punkte P an !

9.2 Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ in Abhängigkeit von α ! Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OR}$; mache sodann eine Aussage über die Ortslinie der Punkte R !

9.3 Zeichne Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OR}$ für $\alpha \in \{0°; 45°; 60°\}$ und zeichne die Ortslinien für die Punkte P und R in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \le x \le 7$; $-5 \le y \le 7$

9.4 Für welchen Wert für α gilt $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OR}|$?

9.5 Die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OR}$ spannen Parallelogramme OPQR auf.
Berechne die Koordinaten von Q in Abhängigkeit von α !

9.6 Unter dem Parallelogrammen gibt es ein Rechteck $OP_0Q_0R_0$.
Für welchen Wert für α ist dies der Fall ?
Bestimme sodann die Koordinaten der Punkte P_0, Q_0 und R_0, und zeichne das Rechteck $OP_0Q_0R_0$ in die Zeichnung zu 9.3 ein !

9.7 Unter den Parallelogrammen OPQR gibt es eine Raute OP*Q*R*.
Bestimme die Koordinaten von P*, Q* und R* !

10.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha + 4 \\ 4\sin\alpha + 5 \end{pmatrix}$ mit $O(0/0)$ und $\alpha \in [0°; 360°[$.

10.1 Zeichne Pfeile $\overrightarrow{OC}$ für $\alpha \in \{0°; 30°; 60°; 90°; 120°; 180°; 270°; 330°\}$ und $\overrightarrow{OA}$ in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \le x \le 10$; $-5 \le y \le 10$

10.2 Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ spannen Parallelogramme OABC auf. Unter diesen Parallelogrammen gibt es zwei Rechtecke OAB_0C_0 und OAB*C*.
Für welche Werte für α existieren diese Rechtecke ?
Gib die Koordinaten von C_0 und C* an !

10.3 Berechne die Koordinaten der Punkte B in Abhängigkeit von α und berechne die Koordinaten von B_0 und B* !

10.4 Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme OABC in Abhängigkeit von α !

10.5 Berechne die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OC}$ in Abhängigkeit von α !
Für welche Werte für α gilt $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}|$?

10.6 Der Punkt $P(4/5)$ bildet mit den Punkten C Pfeile $\overrightarrow{PC}$. Berechne die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{PC}$, bestimme die Länge dieser Pfeile und nenne die Ortslinie für alle Punkte C !

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

10.7 Berechne das Maß φ des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ für $\alpha = 150°$!

11.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6\cos\alpha \\ 6\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3\cos\alpha \\ 3\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in]0°; 90°[$ und $O(0/0)$.

11.1 Zeichne Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ für $\alpha \in \{30°; 60°; 75°\}$ in ein Koordinatensystem !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \le x \le 7$; $-1 \le y \le 10$

11.2 Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ spannen Parallelogramme OABC auf. Zeichne für die Werte von α aus 11.1 diese Parallelogramme in das KOS zu 11.1 ein, und berechne die Koordinaten des Eckpunktes B in Abhängigkeit von α !

11.3 Für welchen Wert für α stehen die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ senkrecht zueinander ?

11.4 Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme OABC in Abhängigkeit von α !
Bestimme α für das flächengrößte Parallelogramm !
[Ergebnis: $A = 18\sin 2\alpha$ FE]

11.5 Für welchen Wert von α wird der Flächeninhalt der Parallelogramme gleich 12 FE ?

11.6 Gibt es im angegebenen Intervall für α gleichlange Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$?
Begründe die Antwort durch Rechnung !

12.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha - 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3\cos\alpha + 5 \\ 3\sin\alpha + 3 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in [0°; 180°]$ und $O(0/0)$.

12.1 Zeichne die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ für $\alpha \in \{0°; 30°; 90°; 180°\}$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \le x \le 9$; $-7 \le y \le 7$

12.2 Berechne das Maß β des Winkels zwischen den Pfeilen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ für $\alpha = 90°$!

12.3 Entscheide durch Rechnung, ob es Werte für α gibt, so dass $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ gilt !

12.4 Berechne die Beträge der Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ in Abhängigkeit von α !
Berechne die Beträge für $\alpha \in \{0°; 60°; 90°\}$!

12.5 Die Punkte P(0/-4) und Q(5/3) bilden mit den Punkten B und C Pfeile $\overrightarrow{PB}$ und $\overrightarrow{QC}$.
Gib die Koordinaten dieser Pfeile in Abhängigkeit von α an !
Berechne die zugehörigen Pfeillängen !
Auf welchen Ortslinien bewegen sich die Punkte B und C ?
Zeichne die Ortslinien in das Koordinatensystem zu 12.1 ein !

12.6 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AB_0C_0 für $\alpha = 65°$!

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

13.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{6\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \\ \frac{6\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \end{pmatrix}$ gegeben, die mit der positiven x-Achse Winkel mit dem Winkelmaß φ und $\varphi \in [0°; 180°]$ einschließen.

13.1 Bestimme die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ in Abhängigkeit von φ.

[Ergebnis: $\overline{OP} = \frac{6}{1+\sin\varphi}$ LE]

13.2 Ermittle mit Hilfe des Ergebnisses aus 13.1 die Winkelmaße φ so, dass $\overline{OP}$ möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

13.3 Die Punkte P(x/y) mit den Koordinaten $x = \frac{6\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$ und $y = \frac{6\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ liegen auf dem Graphen p.
Tabellarisiere x und y in Abhängigkeit von $\varphi \in [0°; 180°]$ in Schritten von $\Delta\varphi = 30°$.
Zeichne sodann den Graphen p für das angegebene Intervall in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{LE}$.

13.4 Der Fußpunkt des Lotes von einem Punkt $P \in p$ auf die x-Achse ist Q. Rotiert das Dreieck OQP um die x-Achse, so entsteht als Rotationskörper ein gerader Kreiskegel.
Trage das Dreieck OQP für $\varphi = 30°$ in das Koordinatensystem zu 13.3 ein.

13.5 Stelle die Mantelfläche M des Rotationskörpers in Abhängigkeit von φ dar.

[Ergebnis: $M(\varphi) = \pi \cdot \frac{36\sin\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}$ FE]

13.6 Für welche Belegungen von φ nimmt die Mantelfläche M den Wert 8π FE an ?

14.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1-\sin\alpha \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ spannen Parallelogramme OPRQ auf.

14.1 Stelle eine Wertetabelle für $\alpha \in \{10°; 20°; 45°; 60°\}$ auf, und zeichne die Parallelogramme OPRQ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 5 cm; $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2{,}5$

14.2 Gib den Flächeninhalt $A(\alpha)$ der Parallelogramme OPRQ in Abhängigkeit von α an.

[Ergebnis: $A(\alpha) = 0{,}4(1+3\sin\alpha)$ FE]

14.3 Für welches Winkelmaß α erhält man ein Parallelogramm mit 1,4 FE Inhalt ?

14.4 Ermittle das Winkelmaß α^*, für das sich das flächengrößte Parallelogramm OPRQ ergibt. Gib A_{max} an.

14.5 Zeige, dass die Pfeilspitzen P eine Gerade beschreiben, indem du ihre Gleichung ermittelst.
Anleitung: Für P(x/y) gilt $x = 1-\sin\alpha \quad \wedge \quad y = 2\sin\alpha$. Eliminiere nun $\sin\alpha$.

14.6 Begründe, dass auch die Punkte R auf einer Geraden liegen.
Welche Gleichung hat diese Gerade ?

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

15.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\alpha} \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix}$.

15.1 Erstelle eine Wertetabelle für $\alpha \in [15°; 75°]$ mit $\Delta\alpha = 15°$, und zeichne die Pfeile im Koordinatensystem. Längeneinheit ist 1 cm. Platzbedarf: $-5 \le x \le +5$; $-4 \le y \le +4$.

15.2 Begründe, dass man anhand der Wertetabelle in 15.1 auch die Koordianten der Pfeile für $\alpha \in]90°; 360°[$ angeben kann. Zeichne sie in das Koordinatensystem zu 15.1 ein.

15.3 Zeige, dass die Pfeilspitzen P auf einer Hyperbel liegen, und ermittle ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten.

16. Führe die Aufgabe 15 mit den Pfeilen $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin^2\varphi + 2\cos\varphi \end{pmatrix}$ durch, und zeige, dass die Pfeilspitzen P auf einer Parabel liegen.

17.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 + \sin\varphi \\ \cos^2\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\cos^2\varphi \end{pmatrix}$.

17.1 Berechne die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ für $\varphi \in \{0°; 20°; 40°; 60°; 270°; 300°; 320°; 340°\}$, und trage die Punkte in ein Koordinatensystem mit 2 cm als Längeneinheit ein. Platzbedarf: $0 \le x \le 4$; $0 \le y \le 4$

17.2 Begründe, dass die Pfeile mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 + \sin\varphi \\ \frac{1}{3}(2 + \sin\varphi)^2 \end{pmatrix}$, die jeweils dieselben x-Koordinaten wie die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ haben, zu den Pfeilen $\overrightarrow{OQ}$ gehören.

17.3 Gemäß Aufgabe 17.2 gilt $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 + \sin\varphi \\ \frac{1}{3}(2 + \sin\varphi)^2 \end{pmatrix}$. Die Differenz Δy der y-Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP}$ gibt somit die Maßzahl der Entfernung $\overrightarrow{QP}$ an. Stelle diese Differenz Δy in Abhängigkeit von φ dar, und zeige durch Umformung, dass sich die beiden Graphen berühren. Berechne die kartesischen Koordinaten des Berührpunktes sowie das zugehörige Winkelmaß φ.

17.4 Stelle die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ durch kartesische Koordinaten dar, und zeige damit, dass beide Graphen Parabeln sind.
Lösungshinweis: Beachte die Anleitung bei Aufgabe 14.5.
[Ergebnis: $p_1 : y = -(x-2)^2 + 1$; $p_2 : y = \frac{1}{3}x^2$]

17.5 Zeige erneut mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 17.4, dass sich die beiden Parabeln p_1 und p_2 berühren, und berechne die kartesischen Koordinaten des Berührpunktes.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

18.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $O(0/0)$ als Ursprung sind Pfeile $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{6\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \\ \frac{6\sin\varphi}{1+\sin\varphi} \end{pmatrix}$ gegeben mit $\varphi \in [0°; 180°]$. siehe auch Aufgabe 13 !

Dabei ist φ das Maß des Winkels zwischen der positiven x-Achse und den Pfeilen $\overrightarrow{OP}$.

18.1 Bestimme die Länge der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ in Abhängigkeit von φ, und ermittle die Winkelmaße für φ, so dass $\overline{OP}$ möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

18.2 Die Endpunkte P der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ liegen auf dem Graphen p. Gib für $\varphi \in [0°; 180°]$ mit $\Delta\varphi = 30°$ die Koordinaten der Punkte P an, und zeichne den Graphen p für das angegebene Intervall in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).

18.3 Bestätige durch Rechnung, dass die Spitzen P der Pfeile $\overrightarrow{OP}$ auf dem Graphen zu $y = -\frac{1}{12}x^2 + 3$ liegen.

18.4 Fällt man von $P \in p$ das Lot auf die x-Achse, so erhält man als Lotfußpunkt Q. Rotieren sodann die Dreiecke mit den Eckpunkten O, Q und P um die x-Achse, so entstehen Kegel.
Stelle die Mantelfläche A_M der Kegel in Abhängigkeit von φ dar.

[Ergebnis: $A_M = \frac{36 \cdot \pi \cdot \sin\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}$ FE]

18.5 Für welche Belegungen von φ nimmt die Mantelfläche A_M den Wert 8π FE an ?

19.0 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit O(0/0) als Ursprung sind Pfeile $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8\cos\varphi \\ 8\sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -4\cos\varphi \\ 4\sin\varphi \end{pmatrix}$ mt $\varphi \in [0°; 90°]$ gegeben.

Die Parallelen zu OB und OD durch D bzw. B schneiden sich im Punkt C.

19.1 Ermittle für $\varphi = 30°$ die Koordinaten der Punkte B und D, und zeichne das Parallelogramm OBCD in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm. Platzbedarf: $-4 \le x \le 7$; $-1 \le y \le 6$

19.2 Bestimme die Koordinaten des Eckpunktes C der Parallelogramme in Abhängigkeit von φ.

19.3 Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme OBCD in Abhängigkeit von φ.

[Ergebnis: $A(\varphi) = 32\sin 2\varphi$ FE]

19.4 Tabellarisiere $A(\varphi)$ für $\varphi \in [0°; 90°]$ mit $\Delta\varphi = 15°$, und zeichne den Graphen von A in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: φ – Achse : 1 cm entspricht 10°; A – Achse : 1 cm entspricht 10 FE.

19.5 Bestimme das Maß φ^*, für das die Fläche des zugehörigen Parallelogramms den größten Wert annimmt. Gib A_{max} an.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

20. Der Punkt B(8/-1) ist ein Eckpunkt einer Raute ABCD, deren Diagonalenschnittpunkt M(4/2) ist und bei der $\sphericalangle DCB = 60°$ gilt.
Zeichne die Raute ABCD in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die fehlenden Eckpunktkoordinaten.

21. In einem Drachenviereck ABCD mit B(3/8), C(x/7) und D(0/2) ist AC die Symmetrieachse, und es gilt $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = 90°$. Zeichne das Drachenviereck ABCD in ein Koordinatensystem, und berechne die fehlende Koordinate des Punktes C sowie die Koordinaten des Punktes A.

22. Zeichne die Raute ABCD mit A(-0,5/y), B(6,5/1,5) und D(-2,5/4,5) in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit.
Berechne die fehlende Koordinate des Punktes A, die Koordinaten des Punktes C, die Innenwinkel und den Flächeninhalt der Raute.

23. Der Eckpunkte D einer Raute ABCD mit A(0/3,5) und C(6/1,5) liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 6$. Zeichne die Raute ABCD, und berechne die Koordinaten der Eckpunkte D und B.

24. Die Eckpunkte D von Rauten ABCD mit $A(1/-2)$ und $C(7/4)$ liegen auf der Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 - 2x + 3$.
Zeichne die möglichen Rauten ABCD in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die Koordinaten der Punkte D und B.

25. Die Punkte $A(-1/y_A)$ und $B(2/y_B)$ liegen auf der Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 2$. Zeichne Punkte C auf der Parabel p, so dass die Punkte A, B und C Dreiecke bilden, die bei A oder bei B rechtwinklig sind. Berechne die Koordinaten der Punkte C.

26. Die Punkte $A(7/-0,5)$ und $B(9/3,5)$ bilden zusammen mit Punkten C der Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ Dreiecke ABC, die bei A oder bei B rechtwinklig sind. Zeichne die möglichen Dreiecke ABC, und berechne die Koordinaten der Punkte C.

27.0 Die Punkte $A(0/0)$, $B(4/-3)$ und $C_n(2k/-\frac{k}{2}+8)$ mit $k \in \mathbb{R}$ bilden Dreiecke ABC_n.

27.1 Zeichne das Dreieck ABC_1 für k = 0 in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit, und berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABC_1.

27.2 Unter den Dreiecken ABC_n gibt es zwei rechtwinklige Dreiecke ABC_2 und ABC_3. Zeichne diese beiden rechtwinkligen Dreicke ein, und berechne die Koordinaten der Punkte C_2 und C_3 sowie die Innenwinkelmaße der Dreiecke.

27.3 Zeichne die Dreiecke ABC_4 mit $\sphericalangle BAC_4 = 60°$ und ABC_5 mit $\sphericalangle BAC_5 = 150°$ ein, und berechne die Koordinaten der Punkte C_4 und C_5.

27.4 Zeige rechnerisch, dass die Eckpunkte C_n der Dreiecke ABC_n auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{1}{4}x + 8$ liegen.

Vektoren, Skalarprodukt, Ortslinien

Klasse 10 I

27.5 Zeichne das Dreieck ABC_0 ein, das gleichschenklig mit [AB] als Basis ist, und berechne die Koordinaten des Punktes C_0, den zugehörigen Wert für k und die Maße der Dreiecksinnenwinkel.

27.6 Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC_6 mit einem Flächeninhalt von 18 FE ?

27.7 Bestimme mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC_n}$ die Definitionsmenge D(k) für k, so dass Dreiecke ABC_n entstehen.