Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

1.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist Grundfläche eines Würfels mit der Deckfläche EFGH, wobei E über A, F über B usw. liegen.
Zur Grundfläche ABCD parallele Ebenen schneiden die Würfelkanten [AE] in A’, [BF] in B’, [CG] in C’ und [DH] in D’. Mit dem Diagonalenschnittpunkt S der Grundfläche ABCD bilden diese Punkte Pyramiden A’B’C’D’S.
Der Winkel $\sphericalangle AA'S$ hat das Maß φ.

1.1 Zeichne den Würfel im Schrägbild mit einer Pyramide !
Für die Zeichnung: a = 6; ω = 45°; q = 0,5; Rissachse CD.
Bezeichne den Winkel mit dem Maß φ !

1.2 Berechne die Länge der Pyramidenkante [A’S] in Abhängigkeit von a und φ !
Gib die Grenzen für φ an !

1.3 Berechne die Pyramidenhöhe $\overline{SS_0} = h\,\text{cm}$ in Abhängigkeit von a und φ !

1.4 Die Pyramidenhöhe ist h cm. Für welche Werte für φ gilt: $\frac{a}{2} \le h \le \frac{2}{3}a$?

1.5 Berechne das Volumen der Pyramide A’B’C’D’S in Abhängigkeit von a und φ !

1.6 Für welchen Wert für φ nimmt das Volumen den Wert $\frac{a^3}{6}\sqrt{2}\,\text{cm}^3$ an ?

2.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist Grundfläche eines Würfels mit der Deckfläche EFGH, wobei E über A, F über B usw. liegen.
Eine Ebene ACQP mit $P \in [EF]$ und $Q \in [FG]$ schneidet aus dem Würfel gleichschenklige Trapeze ACQP aus. Der Neigungswinkel zwischen Trapez und Grundfläche ABCD hat das Maß α.

2.1 Zeichne das Schrägbild des Würfels mit einem Trapez; bezeichne den Winkel mit dem Maß α !
Für die Zeichnung: a = 5; ω = 45°; $q = 0{,}5$; Rissachse CD.

2.2 Bestimme die Grenzen von α und berechne die Trapezhöhe h = x cm in Abhängigkeit von a und α !

2.3 Berechne die Seitenlänge $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von a und α !

2.4 Für welchen Wert für α nimmt die Streckenlänge $\overline{PQ}$ den Wert $\frac{a}{2}\sqrt{2}\text{cm}$ an ?

2.5 Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze ACQP in Abhängigkeit von a und α !

2.6 Tabellarisiere den Term für den Flächeninhalt im erlaubten Intervall in Schritten von $\Delta\alpha = 5°$ für a = 6 und zeichne den Graph !

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

3.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe $h = a\sqrt{3}$ cm. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke [AD].
Eine Ebene APQD mit $P \in [BS]$ und $Q \in [CS]$ schneidet aus der Pyramide gleichschenklige Trapeze APQD aus. Der Neigungswinkel zwischen Trapez und Grundfläche hat das Maß φ.

3.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS und ein Trapez APQD.
Bezeichne den Winkel mit dem Maß φ !
Für die Zeichnung: a = 6; ω = 45°; $q = 0{,}5$; Rissachse CD.

3.2 Bestimme die Grenzen für φ. Berechne die Trapezhöhe h* = x cm in Abhängigkeit von a und φ !

3.3 Für welche Werte für φ gilt: $\frac{3}{4}a \le x \le a\sqrt{2}$?

3.4 Der Punkt R ist Mittelpunkt der Strecke [PQ]. Berechne die Streckenlänge $\overline{SR} = y$ cm in Abhängigkeit von a und φ !

3.5 Für welche Werte für φ wird die Streckenlänge $\overline{SR} \le a$ cm ?

3.6 Berechne die Streckenlänge $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von a und φ !

3.7 Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze APQD in Abhängigkeit von a und φ !

3.8 Tabellarisiere den Term für A im erlaubten Intervall in Schritten von $\Delta\varphi = 10°$ für a = 6 !
Zeichne den zugehörigen Graph !

4.0 Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCS. Die Spitze S liegt senkrecht über C, und es gilt $\overline{CS} = 8$ cm.
Von A aus werden auf [AB] Strecken [AP], von B aus auf [BS] Strecken [BQ] und von S aus auf [SC] Strecken [SR] mit $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{SR} = x$ cm abgetragen ($x \in \mathbb{R}^+$).
Die Punkte P, Q und R sind Eckpunkte von Dreiecken PQR.

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS mit dem Dreieck PQR für x = 3 mit ω = 60° und q = $1:2$. Die Kante [BC] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

4.2 Für welchen Wert von x gilt $\overline{PQ} = 6$ cm ?
Berechne für diesen Fall $\overline{QR}$ und $\overline{PR}$ und die Innenwinkelmaße des Dreiecks PQR.

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

5.0 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit $\overline{CA} = \overline{CB}$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Höhe 8 cm lang ist. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche ABC. M ist der Mittelpunkt der Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 6\text{ cm}$. Die Strecke [CM] ist 5 cm lang. Dreht man eine Ebene um AB, so erhält man als Schnittfiguren mit der Pyramide ABCS Dreiecke ABZ mit $Z \in [CS]$, die die Pyramide ABCS in die Teilpyramiden ABCZ und ABSZ zerlegen. Der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einem Schnittdreieck hat das Maß φ.

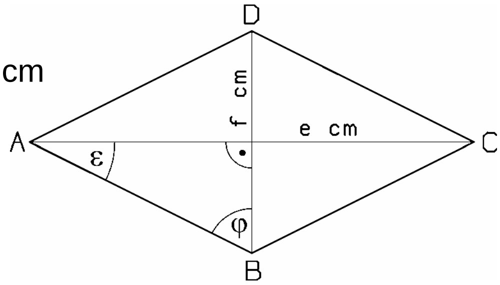
5.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCS mit einem Schnittdreieck ABZ, wobei die Symmetrieachse CM des Dreiecks ABC die Rissachse ist.
Für die Zeichnung: q = 0,5; $\omega = 45°$

5.2 Für welche Werte von φ erhält man Schnittdreiecke ?

5.3 Stelle $\overline{ZM}$ und den Flächeninhalt A der Schnittdreiecke ABZ in Abhängigkeit von φ dar.
Für welchen Wert von φ erhält man das flächenkleinste Schnittdreieck ABZ ?
$\left(\text{Teilergebnis}: A = \dfrac{13{,}85}{\sin(67{,}4° + \varphi)}\text{cm}^2\right)$

5.4 Für welches Winkelmaß φ_0 wird die gegebene Pyramide ABCS von der Ebene durch AB in zwei volumengleiche Pyramiden ABCZ und ABSZ zerlegt ?
Berechne das Winkelmaß φ_0.

6.0 In Rauten ABCD mit der Seitenlänge a sind die Diagonalen [AC] mit $\overline{AC} = e\text{ cm}$ und [BD] mit $\overline{BD} = f\text{ cm}$ zusammen 18 cm lang.
Für das Maß ε von $\sphericalangle BAC$ gilt $0° < \varepsilon < 90°$.



6.1 Zeige durch Rechnung, dass unter den Rauten ABCD das Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ die kürzeste Seite a_0 und damit den kleinsten Umfang besitzt.

6.2 Berechne ε, so dass die Seite a der zugehörigen Raute ABCD 8 cm lang ist.

6.3 Begründe, dass $4{,}5\sqrt{2}\text{ cm} \le a < 9\text{ cm}$ gilt.

6.4 Zeige, dass die Raute $A_0B_0C_0D_0$ mit dem kleinsten Umfang den größten Flächeninhalt besitzt.
$\left(\text{Teilergebnis}: A_{ABCD} = \dfrac{81 \cdot \sin 2\varepsilon}{1 + \sin 2\varepsilon}\text{cm}^2\right)$

6.5 Berechne ε, so dass $A_{ABCD} = 30\text{ cm}^2$ erfüllt ist.

6.6 Die Rauten ABCD rotieren um die Achse BD und erzeugen dabei Doppelkegel als Rotationskörper. Weise für das Volumen V_1 der Doppelkegel nach:

$$V_1(\varepsilon) = 486\pi \cdot \frac{\tan\varepsilon}{(\tan\varepsilon + 1)^3}\text{cm}^3.$$

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

6.7 Stelle zu V_1 eine Wertetabelle auf mit $\Delta\varepsilon = 10°$ und zeichne den Graph für das Volumen gemäß 6.6.
(ε-Achse: 1 cm für 10°; V-Achse: 1cm für 20 cm^3).

6.8 Dem Diagramm zu 6.7 ist zu entnehmen, dass etwa mit 27° für ε der Doppelkegel mit dem größten Volumen entsteht. Bestätige $26° < \varepsilon < 28°$ mit dem Taschenrechner, und bestimme dann durch Intervallschachtelung ε auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

6.9 Bei Rotation der Rauten ABCD um die Achse AC entstehen ebenfalls Doppelkegel. Zeige, dass für das Volumen V_2 dieser Doppelkegel gilt: $V_2 = V_1 \cdot \tan \varepsilon$.

6.10 Zeige durch Rechnung, dass $V_2(90°-\varepsilon) = V_1(\varepsilon)$ gilt. Mit welchem Wert für ε nimmt daher V_2 einen maximalen Wert an ? Wann gilt $V_2 = V_1$?

7.0 Eine Menge von geraden Kreiskegeln ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Kegel gleichlange Mantellinien s haben, die aber von Kegel zu Kegel verschiedene Neigungswinkel α mit der Grundfläche einschließen. Jeder Kegel enthält eine Inkugel.

7.1 Zeichne vom Kegel mit s = 6 cm und α = 50° eine Schnittfigur, die die Kegelhöhe enthält !

7.2 Stelle das Volumen $V(s; \alpha)$ der Kegel, den Radius $r_K(s; \alpha)$ der Inkugeln und die Mantelfläche $A_M(s; \alpha)$ der Kegel in Abhängigkeit von s und α dar !

7.3 Begründe algebraisch, dass es im Intervall $0° < \alpha < 90°$ keine Kegel mit extremer Mantelfläche gibt !

7.4 Tabellarisiere für s = 6 cm jeweils $V(6\text{ cm}; \alpha)$ und $r_K(6\text{ cm}; \alpha)$ im Intervall $0° \le \alpha \le 90°$ in Schritten $\Delta\alpha = 10°$.

8.0 Ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC rotiert um [AB] als Achse: Es entsteht ein Doppelkegel.
Der Winkel $\sphericalangle BAC$ hat das Maß α, der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist r und ist zugleich Radius der Kugel, die dem Doppelkegel umbeschrieben ist.

8.1 Fertige eine Zeichnung des Axialschnitts mit r = 5 cm und α = 30° an.

8.2 Das Volumen V des Rotationskörpers, der entsteht, wenn aus der Kugel der Doppelkegel herausgenommen wird, ist abhängig von r und α.
Bestimme $V(r;\alpha)$.

$$\left(\text{Ergebnis}: V(r;\alpha) = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \left(2 - \sin^2 2\alpha\right)\right)$$

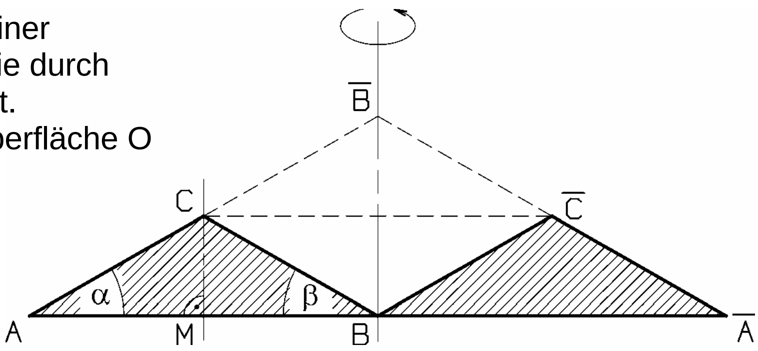
8.3 Bestimme algebraisch das Winkelmaß α^*, für das $V(r;\alpha)$ aus Aufgabe 8.2 möglichst klein ist.

8.4 Für welche Werte für α wird für r = 5 cm das Volumen gleich $100 \cdot \pi\ cm^3$?

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie
Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

9.1 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 4\text{cm}$ und $\alpha = \beta = 30°$ rotiert um eine zu seiner Symmetrieachse parallelen Achse, die durch den Eckpunkt B des Dreiecks verläuft. Berechne das Volumen V und die Oberfläche O des Rotationskörpers.
(Teilergebnis: $O = 324{,}9\ \text{cm}^2$)

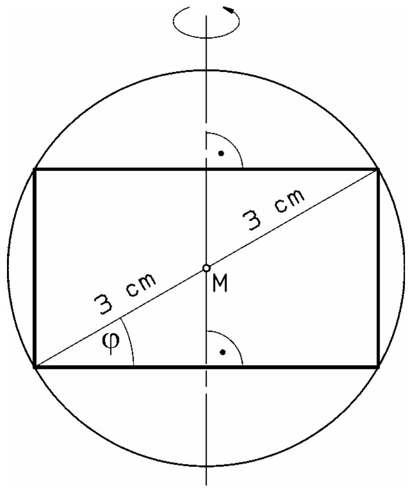


9.2 Stelle das Volumen $V(\alpha)$ und die Oberfläche $O(\alpha)$ der Rotationskörper in Abhängigkeit vom variablen Winkelmaß α dar.
$\left(\text{Teilergebnis}: O(\alpha) = 64\pi\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha\right)\text{cm}^2\right)$

9.3 Für welches Winkelmaß α beträgt die Oberfläche des Rotationskörpers $80\pi\ \text{cm}^2$?

9.4 Berechne das größte mögliche Volumen der Rotationskörper. Welche Oberfläche besitzt der Rotationskörper mit dem größten Volumen ?

10.1 Einem Kreis mit dem Radius r = 3 cm werden Rechtecke einbeschrieben. Stelle den Umfang $u(\varphi)$ in Abhängigkeit vom Maß φ des Winkels dar, den die Rechtecksdiagonale mit einer Rechtecksseite einschließt, und prüfe durch Rechnung, ob man dem Kreis ein Rechteck mit einem Umfang von 14 cm einbeschreiben kann.



10.2 Wenn der Umfang am größten ist, ist auch das Quadrat des Umfangs
$u^2(\varphi) = 144(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)\ \text{cm}^2$
am größten. Zeige damit, dass
$u(\varphi) = 12\sqrt{1 + \sin 2\varphi}$ cm gilt, und gib den größten möglichen Umfang u_{max} an.

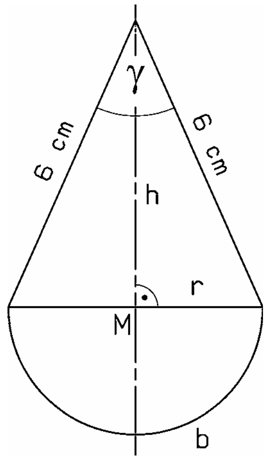
10.3 Lässt man nun den Kreis mit den einbeschriebenen Rechtecken um die Achse a rotieren, so erhält man Zylinder, die einer Kugel einbeschrieben sind. Welcher Zylinder besitzt die größte Mantelfläche ? Berechne φ für diesen Fall.

10.4 Stelle das Volumen $V(\varphi)$ der Zylinder in Abhängigkeit von φ dar, und ermittle das größte mögliche Zylindervolumen.

10.5 Zeige, dass man als Oberfläche der Zylinder $O(\varphi) = 18\pi(\cos^2\varphi + \sin 2\varphi)\ \text{cm}^2$ erhält. Zeichne den Graphen der Funktion mit $y = \cos^2\varphi + \sin 2\varphi$ für $0° \le \varphi \le 90°$, und ermittle dann φ für den Zylinder mit der größten Oberfläche auf ein Stelle nach dem Komma gerundet mit Hilfe einer Intervallschachtelung. Berechne sodann O_{max}.
(Teilergebnis: $\varphi = 31{,}7°$)

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I



11.0 Die gegebene Figur ist aus einem gleichschenkligen Dreieck und einem Halbkreis zusammengesetzt. Die 6 cm langen Schenkel schließen den Winkel mit dem Maß γ ein.

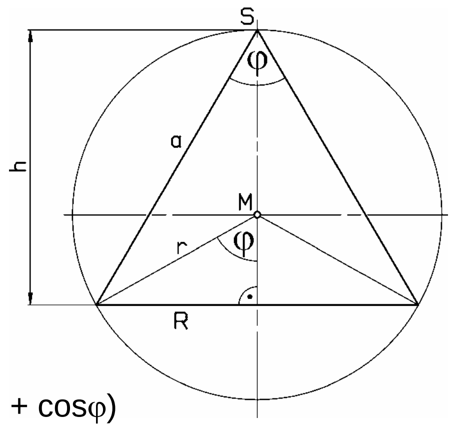
11.1 Für welches Maß γ ist der Halbkreisbogen 12 cm lang ?

11.2 Berechne γ so, dass das gleichschenklige Dreieck und der Halbkreis denselben Flächeninhalt besitzen.

11.3 Zeige, dass man $A(\gamma) = 9(2\sin\gamma - \pi\cos\gamma + \pi)\ \text{cm}^2$ als Flächeninhalt der zusammengesetzten Figur erhält.
Für welchen Wert von γ beträgt der Flächeninhalt $36\pi\ \text{cm}^2$?

11.4 Lässt man die Gesamtfigur um ihre Symmetrieachse rotieren, so erhält man einen Rotationskörper, der aus einem Kegel und einer Halbkugel zusammengesetzt ist. Zeige, dass man $O(\gamma) = 36\pi\left(\sin\frac{\gamma}{2} + 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\text{cm}^2$ als Oberfläche erhält. Berechne sodann γ, so dass die Oberfläche $45\pi\ \text{cm}^2$ beträgt.

11.5 Stelle das Volumen $V(\gamma)$ der Rotationskörper in Abhängigkeit von γ dar, und tabellarisiere $V(\gamma)$ für $100° \le \gamma \le 180°$ in Schritten $\Delta\gamma = 10°$.
Zeichne den Graphen für $V(\gamma)$ in ein Koordinatensystem und entnimm diesem γ für den Rotationskörper mit dem größten Volumen.



12.0 Einer Kugel mit dem Radius r = 5 cm werden gerade Kreiskegel einbeschrieben, deren gemeinsame Spitze S ein Punkt der Kugeloberfläche ist.
Zwei gegenüberliegende Mantellinien eines Kegels schließen den Öffnungswinkel mit dem Maß φ ein.
Das nebenstehende Bild zeigt einen Axialschnitt.

12.1 Zeige, dass man $V(\varphi) = \frac{125\pi}{3} \cdot \sin^2\varphi\,(1 + \cos\varphi)\ \text{cm}^3$ als Volumen der Kegel in Abhängigkeit von φ erhält.

12.2 Tabellarisiere die Funktion mit der Gleichung $y = \sin^2\varphi\,(1 + \cos\varphi)$ für $0° \le \varphi \le 100°$ in Schritten $\Delta\varphi = 10°$, und zeichne den Graphen.
Ermittle sodann φ für den größten Funktionswert durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet, und berechne damit V_{max}.
(Teilergebnis: $V_{max} = 155{,}1\ \text{cm}^3$)

12.3 Zeige, dass man $A(\varphi) = 25 \cdot \sqrt{2}\pi \cdot \sin\varphi\,\sqrt{1 + \cos\varphi}\ \text{cm}^2$ als Mantelfläche der Kegel erhält.
Begründe mit Hilfe des Ergebnisses von 12.1, dass der Kegel mit dem größten Volumen auch die größte Mantelfläche besitzt.

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

12.4 Für welches Winkelmaß φ erhält man einen Kegel, dessen Mantelfläche doppelt so groß ist wie seine Grundfläche ?

$$2 \cdot \sin^2\varphi = \sqrt{2} \cdot \sin\varphi\sqrt{1+\cos\varphi} \quad | : \sin\varphi \qquad (\sin\varphi \neq 0)$$

Lösungshinweis: $\Rightarrow \; 2 \cdot \sin\varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\cos\varphi} \quad |^2$

$$\Rightarrow \; 4 \cdot \sin^2\varphi = 2(1+\cos\varphi)...$$

13.0 Einer Kugel mit dem Radius r = x cm werden Kegel einbeschrieben.
Der Winkel an der Spitze des Achsenschnittdreiecks von den Kegeln hat das Maß γ.

13.1 Zeichne einen Axialschnitt von Kugel und Kegel für x = 4,5 und γ = 45° !

13.2 Berechne den Kegelradius r_{Ke} = z cm in Abhängigkeit von x und γ ! (Nicht $\frac{\gamma}{2}$!)

13.3 Berechne die Kegelhöhe h = y cm in Abhängigkeit von x und γ ! (Nicht $\frac{\gamma}{2}$!)

13.4 Gib die Grenzen für γ an ! Für welchen Wert für γ wird die Kegelhöhe gleich $\frac{x}{2}$cm ?

13.5 Für welchen Wert für γ wird die Kegelhöhe gleich $\frac{7}{4}x$ cm ?

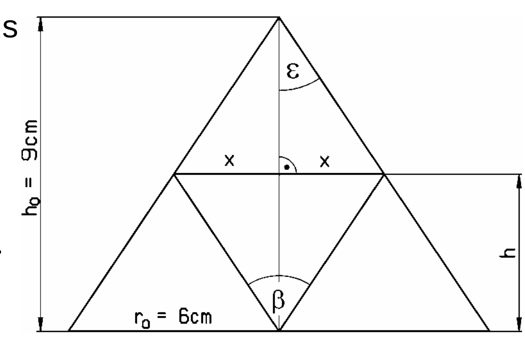
13.6 Die Mantellinien sind s = u cm lang. Berechne s in Abhängigkeit von x und γ !

13.7 Für welche Werte für γ wir die Mantellinie gleich x, gleich $x\sqrt{2}$ cm und größer als $\frac{3}{2}x$ cm ?

13.8 Berechne das Volumen V der Kegel in Abhängigkeit von x und γ !

13.9 Tabellarisiere den Volumenterm für x = 6 im Intervall [0°; 180°] in Schritten $\Delta\gamma = 15°$!
Zeichne ein γ-V-Diagramm !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $1\,\text{cm} \triangleq 15°$; $1\,\text{cm} \triangleq 30\,\text{cm}^3$

14.0 Einem geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r_0 = 6 cm und der Höhe h_0 = 9 cm werden auf der Spitze stehende gerade Kreiskegel einbeschrieben. Die Spitzen aller einbeschriebenen Kegel fallen mit dem Höhenfußpunkt des ursprünglichen Kegels zusammen. Der Öffnungswinkel eines einbeschriebenen Kegels hat das Maß β, der Grundkreisradius misst x cm und die Höhe h cm.



14.1 Stelle h, x und das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von β dar.

$$\left(\text{Teilergebnis}: V(\beta) = 72\pi \frac{\tan^2\frac{\beta}{2}}{\left(\tan\frac{\beta}{2} + \frac{2}{3}\right)^3}\,\text{cm}^3 \right)$$

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

14.2 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{\tan^2 \frac{\beta}{2}}{\left(\tan\frac{\beta}{2} + \frac{2}{3}\right)^3}$ für $0° \le \beta \le 180°$. Berechne β_0 für den größten Funktionswert $f(\beta_0)$ durch Intervallschachtelung auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und schließlich damit V_{max}.

14.3 Stelle das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von x dar.

$$\left(\text{Ergebnis}: V(x) = \frac{\pi}{2}x^2(6-x)\ \text{cm}^3\right)$$

14.4 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = x^2(6 - x)$ für $0 \le x \le 6$. Dem Graph kann man entnehmen, dass vermutlich $f(4+d) \le f(4)$ für $d \in [0; 6]$ gilt. Weise dies durch Rechnung nach.

15.1 Geraden Kreiskegeln mit dem Öffnungswinkel φ und 8 cm langen Mantellinien werden Kugeln einbeschrieben. Stelle den Kugelradius ρ in Abhängigkeit von φ dar.

$$\left(\text{Ergebnis}: \rho = \frac{4\sin\varphi}{1+\sin\frac{\varphi}{2}}\ \text{cm}\right)$$

15.2 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{4\sin\varphi}{1+\sin\frac{\varphi}{2}}$ für $0° \le \varphi \le 90°$.

Entnimm dem Graphen φ_0 für den größten Funktionswert $f(\varphi_0)$, und ermittle φ_0 durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet. Berechne mit diesem Wert die Oberfläche der größten Inkugel und die Oberfläche des zugehörigen Kegels.

15.3 Begründe durch Rechnung, dass es keinen Kegel gibt, dessen Mantelfläche gleich der Oberfläche seiner Inkugel ist.