Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

1.0 Bei den gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit A(0/0) liegen die Fußpunkte E_n der jeweiligen Höhen von A auf $[B_nC_n]$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x + 8$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

1.1 Zeichnen Sie die Gerade g und die Dreiecke AB_1C_1 mit $E_1(-1{,}5 \mid y_1)$ und AB_2C_2 mit $E_2(1 \mid y_2)$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \le x \le 9$; $-1 \le y \le 12$

1.2 Die Punkte $E_n(x \mid 2x + 8)$ können durch zwei hintereinander ausgeführte Abbildungen auf die Punkte B_n abgebildet werden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte E_n.
Ergebnis: $B_n\left[x\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)+\frac{8}{3}\sqrt{3} \;\middle|\; x\left(2-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)+8\right]$

1.3 Ermitteln Sie sodann durch Rechnung (auf zwei Stellen nach dem Komma runden) die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte B_n, und zeichnen Sie h in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

1.4 Weisen Sie durch Rechnung nach (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), dass sich die Koordinaten der Mittelpunkte M_n der Strecken $[E_nB_n]$ wie folgt in Abhängigkeit von x darstellen lassen: $M_n(1{,}58x + 2{,}31 \mid 1{,}71x + 8)$

1.5 Unter den Dreiecken AB_nC_n besitzt das Dreieck AB_0C_0 die kleinstmögliche Höhe $\overline{AE_0}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E_0.
Bestimmen Sie sodann durch Rechnung die Koordinaten der Punkte B_0 und C_0.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)

2.0 Das gleichschenklige Trapez ABCD mit $[AB] \parallel [CD]$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Der Punkt E ist Mittelpunkt der Strecke $[CD]$ und der Punkt F ist Mittelpunkt der Strecke $[AB]$.
Gegeben sind: $\overline{AB} = 18$ cm, $\overline{CD} = 8$ cm, $\overline{EF} = 7$ cm.
Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt E mit $\overline{ES} = 12$ cm.

2.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Dabei soll die Strecke [EF] auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

2.2 Die Strecken $[EM_n]$ mit $M_n \in [FS]$ sind die Höhen von Trapezen DCQ_nP_n mit $P_n \in [AS]$ und $Q_n \in [BS]$. Das Maß der Winkel FEM_n ist φ mit $0° \leq \varphi < 90°$. Zeichnen Sie das Trapez DCQ_1P_1 für $\varphi = 75°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

2.3 Berechnen Sie die Streckenlänge $EM_n(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).
[Ergebnis: $EM_n(\varphi) = \dfrac{6{,}05}{\sin(\varphi + 59{,}74°)}\,\text{cm}$]

2.4 Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{SM_n}(\varphi)$ und sodann die Streckenlänge $\overline{P_nQ_n}(\varphi)$ jeweils in Abhängigkeit von φ. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).
[Teilergebnis: $P_nQ_n(\varphi) = \dfrac{15{,}55 \cdot \cos\varphi}{\sin(\varphi + 59{,}74°)}\,\text{cm}$]

2.5 Unter den Trapezen DCQ_nP_n gibt es ein Rechteck DCQ_0P_0. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)
[Ergebnis: $\varphi = 65{,}16°$]

3.0 Gegeben ist das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 8\text{ cm}$ und $\overline{AC} = 8\text{ cm}$. Punkte Q auf der Dreieckseite [BC] bilden mit Punkten P jeweils Eckpunkte von Rechtecken APQR, wobei die Punkte P die Fußpunkte der Lote von Q auf [AB] sind. Der Winkel PAQ hat das Maß φ mit $0° < \varphi < 90°$.

3.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC sowie das Rechteck APQR für $\varphi = 30°$.

3.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Streckenlängen $\overline{AQ}_{(\varphi)}$ wie folgt in Abhängigkeit von φ darstellen lassen:

$$\overline{AQ}_{(\varphi)} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sin(\varphi + 45°)}\,\text{cm}$$

3.3 Die Rechtecke APQR rotieren um AC als Achse.
Ermitteln Sie die Mantelfläche $M(\varphi)$ der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $M(\varphi) = \dfrac{64 \cdot \pi \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin^2(\varphi + 45°)}\,\text{cm}^2$]

3.4 Die Dreiecke APQ rotieren ebenfalls um AC als Achse.
Stellen Sie das Volumen $V(\varphi)$ der dabei entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ dar.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \dfrac{256 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi}{3 \cdot \sin^3(\varphi + 45°)}\,\text{cm}^3$]

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

3.5 Berechnen Sie φ (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), so dass die Maßzahlen der Mantelfläche $M(\varphi)$ aus 3.3 und des Volumens $V(\varphi)$ aus 3.4 gleich sind.
[Ergebnis: $\varphi = 59{,}04°$]

4.0 Gegeben sind die Pfeile $\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} 2+8\cdot\cos\varphi \\ 2+\cos\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} -6\cdot\cos^2(\frac{\varphi}{2}) \\ 6\cdot\cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi = [0°;180°]$ und O(0|0).

4.1 Berechnen Sie für $\varphi \in \{0°;\ 60°;\ 90°;\ 120°\}$ die Koordinaten der jeweils zugehörigen Pfeile $\overrightarrow{OP_n}$ und $\overrightarrow{OQ_n}$ und zeichnen Sie die Pfeile in ein Koordinatensystem.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden).
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \le x \le 11$; $-7 \le y \le 7$

4.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte P_n auf der Geraden g mit $y = \frac{1}{8}x + 1{,}75$ liegen.
Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung des Trägergraphen der Punkte Q_n.

4.3 Der positive Teil der x-Achse schließt mit einem der Pfeile $\overrightarrow{OP_n}$ einen Winkel mit dem Maß 60° ein.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

4.4 Zeigen Sie durch Rechnung, dass es kein gemeinsames Winkelmaß φ gibt, so dass $\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OQ_n}$ gilt.

4.5 Stellen Sie die Streckenlänge $\overline{OP}(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ dar.
Ermitteln Sie rechnerisch das Winkelmaß φ_0 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, so dass die Streckenlänge $\overline{OP}(\varphi)$ minimal ist.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

5.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos\alpha \\ \dfrac{1}{\sin\alpha} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin\alpha \\ 6 \cdot \cos^2\alpha \end{pmatrix}$ mit O(0|0) legen für $\alpha \in]0°;\ 180°[$ die Eckpunkte von Dreiecken OP_nQ_n bzw. OQ_nP_n fest.

5.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP_n}$ und $\overrightarrow{OQ_n}$ für $\alpha \in \{20°;\ 50°;\ 150°\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann die zugehörigen Dreiecke OP_1Q_1, OP_2Q_2 und OP_3Q_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \le x \le 6$; $\quad -1 \le y \le 7$

5.2 Stellen Sie den Flächeninhalt $A(\alpha)$ der Dreiecke OP_nQ_n in Abhängigkeit von α dar.
Berechnen Sie sodann das Winkelmaß α_0 (auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), für das man das Dreieck OP_0Q_0 mit einem Flächeninhalt von 7 FE erhält.
(Zwischenergebnis: $A(\alpha) = (15\cos^3\alpha - 2)\,\text{FE}$)

5.3 Ermitteln Sie die Gleichung des Graphen, auf dem die Eckpunkte Q_n liegen.

5.4 Für welche Winkelmaße α erhält man bei O(0|0) rechtwinklige Dreiecke ?
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

6.0 Der Graph von $f: y = 2^x - 4$ wird durch orthogonale Affinität auf den Graphen von $f_1: y = 2^{x-2} + C$ abgebildet.
Bestimmen Sie den Orthogonalitätsfaktor k und die Konstante C.
(Zwischenergebnis: C = -1)

6.1 Welche Verschiebung des Graphen von f hätte ebenfalls den Graphen von f_1 ergeben ?

6.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f und f_1.

6.3 Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion f_1^{-1} ?

6.4 Zeigen Sie, dass f_1^{-1} auf die Form $y = \log_2(4x+4)$ gebracht werden kann.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

7.0 Der Graph von $f: y = \sqrt{3}^{\,x-4}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist G.

7.1 Bringen Sie f auf die Form $y = a \cdot 3^{b \cdot x}$.

7.2 Der Graph G wird zunächst durch orthogonale Affinität mit k = -3 und dann mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf den Graphen G_1 abgebildet.

7.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f_1 von G_1.
(Ergebnis: $y = -\sqrt{3}^{\,x} + 4$)

7.4 Geben Sie die Definitionsmenge, Wertemenge und die Asymptotengleichung von f_1 an.

7.5 Tabellarisieren Sie f_1 für $x \in [-2; 4]$ mit $\Delta x = 1$ und zeichnen Sie G_1 in ein Koordinatensystem. 1 LE = 1 cm

7.6 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G mit G_1.

7.7 Geben Sie die nach y aufgelöste Gleichung der Umkehrfunktion von f_1 an.

7.8 Geben Sie die Definitionsmenge, Wertemenge und die Asymptotengleichung f_1^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen mit ins Koordinatensystem ein.

8.0 Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $y = \log_{1,5}(x-1) - 4$ ist Trägergraph der Eckpunkte C_n von gleichschenkligen Trapezen ABC_nD_n mit $A(-3\,|\,1), B(1\,|\,-3)$ und $\overline{BC_n} = \overline{AD_n}$. Außerdem gilt x > 2 und $x \in \mathbb{R}$ für die Abszisse x der Eckpunkte C_n. ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

8.1 Tabellarisieren Sie f für $x \in \{1,5;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f sowie die Trapeze ABC_1D_1 für $x = 3$ und ABC_2D_2 für $x = 8$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \le x \le 9$; $-7 \le y \le 9$

8.2 Berechnen Sie die Maße der Innenwinkel des gleichschenkligen Trapezes ABC_2D_2. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)

8.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Gerade w mit der Gleichung y = x ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) die Symmetrieachse der gleichschenkligen Trapeze ABC_nD_n ist. Ermitteln Sie sodann rechnerisch die nach y aufgelöste Gleichung des Trägergraphen h der Eckpunkte D_n, und zeichnen Sie w und h in das Koordinatensystem zu 8.2 ein.

8.4 Im gleichschenkligen Trapez ABC_3D_3 ist die Seite $[BC_3]$ parallel zur x-Achse. Berechnen Sie die x-Koordinate des Eckpunktes C_3.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

9.0 Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $y = 2^{x-2} - 1$ und f_2 mit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} + 3{,}5$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

9.1 Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge zu f_1 an.

9.2 Tabellarisieren Sie f_1 und f_2 für $x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 5{,}5\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, und zeichnen Sie sodann die Graphen zu f_1 und zu f_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 11$

9.3 Die Punkte $A_n(x \mid 2^{x-2} - 1)$ auf dem Graphen zu f_1 und die Punkte B_n auf dem Graphen zu f_2 sind die Endpunkte von Strecken $[A_nB_n]$. Die Abszisse der Punkte B_n ist dabei jeweils um 1 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n.
Zeichnen Sie für x = 0 die Strecke $[A_1B_1]$ und für x = 4 die Strecke $[A_2B_2]$ in das Koordinatensystem zu 9.2 ein.
Zeigen Sie sodann rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $B_n(x-1 \mid 2^{x-4} + 3{,}5)$.

9.4 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für die Koordinaten der Mittelpunkte M_n der Strecken $[A_nB_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$M_n(x - 0{,}5 \mid 5 \cdot 2^{x-5} + 1{,}25)$

9.5 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen zu f_1 und zu f_2.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden)
[Ergebnis: $S(5{,}17 \mid 8)$]

10.0 Gegeben sind die Geraden g_1 mit $y = -2x - 3{,}5$; g_2 mit $y = \frac{4}{5}x - 3{,}5$ und g_3 mit y = 5.

10.1 Den Geraden ist ein gleichschenkliges Dreieck PQR einzubeschreiben, das folgende Bedingungen erfüllt:
- Der Koordinaten-Ursprung ist Mittelpunkt der Seiten $\overline{PQ}$.
- $\overline{PR} = \overline{QR}$
- $P \in g_1$; $Q \in g_2$; $R \in g_3$

Konstruieren Sie das Dreieck (gegebenenfalls mit Hilfe von Probierdreiecken).

10.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P, Q, R durch Rechnung.

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

11.0 Die Pfeile $\overrightarrow{OA_n} = \begin{pmatrix} 4\cos\varphi \\ 4\sin^2\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB_n} = \begin{pmatrix} -4\cos\varphi \\ 4 \end{pmatrix}$ mit O(0|0) und $\varphi \in [0°; 90°]$ spannen Dreiecke OA_nB_n auf.

11.1 Stellen Sie für $\varphi \in \{0°;\ 30°;\ 45°;\ 60°\}$ eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie die Dreiecke in ein Koordinatensystem. 1 LE = 1 cm

11.2 Wie lauten die Gleichungen der Trägergraphen der Punkte A_n und B_n?

11.3 Für welchen Wert von φ entsteht ein bei O rechtwinkliges Dreieck ?

11.4 Für welchen Wert von φ sind die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ gleich lang ?

11.5 Stellen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke als Funktion von φ dar.

11.6 Suchen Sie durch Tabellarisieren (Intervallschachtelung) das Maximum der Flächeninhalte.

12.0 Es gibt ein Quadrat ABCD, das folgende Bedingungen erfüllt: A(0|0), $B \in g: y = \frac{1}{3}x - 3, \quad C \in h: y = -x + 6$

12.1 Konstruieren Sie das Quadrat (gegebenenfalls mit Hilfe von Probierquadraten).

12.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D.

13.0 Drachen AB_kCD_k sind wie folgt festgelegt: A(0|0), $B_k(k\,|\,-2)$ mit k > 0 und C(8|4). Symmetrieachse ist AC.

13.1 Zeichnen Sie die Drachen für $k_1 = 3$ und $k_2 = 7$ in ein Koordinatensystem.

13.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte D_k in Abhängigkeit von k. Wie lautet die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_k?

13.3 Für welche Werte von k entstehen bei B_k rechtwinklige Drachen ? (Ergebnis: $k_1 = 2, k_2 = 6$)

Übungsaufgaben zur Abschlussprüfung

Klasse 10 I

13.4 Überprüfen Sie rechnerisch, welcher der Drachen von 13.3 gleichzeitig Quadrat ist.

13.5 Stellen Sie die Flächeninhalte der Drachen als Funktion von k dar.

14.0 Die Punkte O, $A_k(k\,|\,-0{,}5k-1)$ mit $k>0$ und B(6|2) legen Drachen OA_kBC_k fest. Symmetrieachse ist OB.

14.1 Zeichnen Sie die Drachen für $k \in \{3, 4, 5\}$.

14.2 Wie lauten die Gleichungen der Trägergraphen der Punkte A_k und C_k?

14.3 Für welche Werte von k entstehen bei A_k rechtwinklige Drachen ?

14.4 Für welchen Wert von k entsteht eine Raute ?

14.5 Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute.

14.6 Stellen Sie die Flächeninhalte der Drachen als Funktion von k dar.

15.0 Eine Schar von Parallelogrammen $OA_kB_kC_k$ ist festgelegt durch: $\overrightarrow{OA_k} = \begin{pmatrix} k \\ 0{,}5k-3{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB_k} = \begin{pmatrix} -k+8 \\ k-2 \end{pmatrix}$.

15.1 Legen Sie eine Wertetabelle an für $k \in \{-1;\ 2;\ 4\}$ und zeichnen Sie die Parallelogramme in ein Koordinatensystem.

15.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C_k in Abhängigkeit von k und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte C_k an.

15.3 Berechnen Sie das Maß des Winkels C_2OA_2.

15.4 Welche Werte von k liefern Rechtecke, Rauten und Quadrate ?