Raumgeometrie

ebene Schnitte - funktionale Abhängigkeiten

1. Gegeben ist ein Quader ABCDEFGH mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BF} = 1{,}5a$ und $\overline{BC} = 2a$. Um die Gerade AB rotiert eine Ebene („Pendelebene"). Sie schließt mit der Grundfläche den Winkel φ ein.
Für $\varphi \in [0°; 90°]$ schneidet sie aus dem Quader Rechtecke aus. Es soll der Flächeninhalt der Schnittfläche in Abhängigkeit von a und φ bestimmt werden.
Erstelle für a = 5 cm eine Wertetabelle und zeichne den Graphen; $\varphi \in [0°; 90°]$

2.0 Ein gerades Prisma hat ein Rechteck als Grundfläche. Die Seitenlängen sind $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = 2a$, die Höhe des Prismas (Quaders) ist 3,5a. Ebenen des Ebenenbüschels mit BC als Achse schneiden das Prisma in Rechtecken.

2.1 Zeichne ein Schrägbild des Prismas für a = 3 cm, ω = 45°; q = 0,5.
Trage zwei Schnittfiguren in das Schrägbild ein.

2.2 Die Schnittebenen des Büschels schließen mit der Grundfläche Winkel mit dem variablen Maß φ ein. Berechne den Flächeninhalt A der Schnittfiguren in Abhängigkeit von a und φ.
Lösungshinweis: Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

2.3 Für welche Werte von φ und a = 3 cm erhält man Schnittflächen mit einem Flächeninhalt von 30 cm^2 ?

2.4 Mit welchen Werten für φ und a = 3 cm erhält man Schnittflächen mit einem Flächeninhalt von 78 cm^2 ?

3.0 Ein gerades Prisma ABCDEF mit 10 cm Höhe hat ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 6 cm als Grundfläche. Der Punkt D liegt dabei senkrecht über A. Ebenen des Ebenenbüschels mit AB als Büschelgerade schneiden das Prisma in Dreiecken bzw. Trapezen.

3.1 Zeichne ein Schrägbild des Prismas für ω = 60° und q = 0,5. Die Seite [AC] des Dreiecks soll dabei auf der Rissachse liegen.
Trage zwei Schnittfiguren in das Schrägbild ein.

3.2 Die Ebenen des Büschels schließen mit der Grundfläche den Winkel ε ein. Für welche Belegung von ε erhält man als Schnittfiguren Dreiecke bzw. Trapeze ?

3.3 Ermittle den Flächeninhalt A(ε) der Schnittflächen in Abhängigkeit von ε.

$$\left[\text{Ergebnis: } A(\varepsilon) = \frac{9\sqrt{3}}{\cos\varepsilon}\,\text{cm}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad A(\varepsilon) = \left(\frac{60}{\sin\varepsilon} - \frac{100\sqrt{3}\cdot\cos\varepsilon}{3\cdot\sin^2\varepsilon}\right)\text{cm}^2\right]$$

3.4 Widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels die Behauptung, dass die Schnittfläche ABF den größten Flächeninhalt besitzt.

Raumgeometrie

ebene Schnitte - funktionale Abhängigkeiten

4.0 Das Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 6\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\text{cm}$ ist Grundfläche einer 10 cm hohen Pyramide. Die Spitze S liegt dabei senkrecht über dem Mittelpunkt M der Grundkante [AD].

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide für q = 0,75 und ω = 45°. Die Kante [CD] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

4.2 Ermittle durch Rechnung das Maß φ* des Winkels, den die Seitenfläche ABS mit der Grundfläche einschließt, sowie das Maß des Winkels SCM.

4.3 Ebenen schneiden die Pyramide in gleichschenkligen Trapezen BCF_nE_n. Sie schließen mit der Grundfläche Winkel mit dem Maß φ ein.
Berechne den Flächeninhalt der Trapeze in Abhängigkeit von φ.

5.0 Bei einer Pyramide ABCDS, deren Grundfläche ein Quadrat ABCD mit der Seite a ist, liegt die Spitze S senkrecht über dem Grundflächeneckpunkt D mit $\overline{SD} = a\sqrt{6}$.
Ebenen, die die Grundflächendiagonale [AC] enthalten und mit der Grundfläche ABCD Winkel BMP mit dem Maß φ einschließen, schneiden die Pyramide ABCDS für $\varphi \in]0°;180°[$ jeweils in einem gleichschenkligen Dreieck ACP, dessen Basiswinkel CAP das Maß ε hat.

5.1 Zeige: $\sphericalangle SBD = 60°$; $\sphericalangle DAS = \sphericalangle SCD = 67{,}8°$; $\sphericalangle CBS = \sphericalangle SBA = 69{,}3°$.

5.2 Bestätige jeweils durch Rechnung:

a) $\overline{MP} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \tan\varepsilon$ **b)** $A_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \tan\varepsilon$

5.3 Für welchen Winkel ε gilt $A_{\Delta ACP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$?

5.4 Wie groß ist ε, wenn $A_{\Delta ACP} = A_{\Delta ABC}$ erfüllt ist ? Welches Maß φ hat in diesem Fall $\sphericalangle BMP$, und wie lang ist dann die Strecke [BP] ?

5.5 Berechne φ, ε und $\overline{BP}$ für den Fall, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ACP minimal ist.

5.6 Zeige für ε die Beziehung $40{,}9° \le \varepsilon \le 74{,}5°$.

5.7 Begründe, warum es zu einem Winkel ε mit $\varepsilon \in]45°; 74{,}5°[$ jeweils zwei verschiedene Schnittdreiecke ACP_1 mit $P_1 \in [BS]$ und ACP_2 mit $P_2 \in [SD]$ gibt.

5.8 Berechne ε und $\overline{BP}$ für φ = 90°.

5.9 Für φ = 90° stellt ABCDP eine gerade quadratische Pyramide mit P als Spitze dar.
In welchem Verhältnis stehen in diesem Fall das Volumen der Pyramide ABCDS und das Volumen der Pyramide ABCDP zueinander ?

5.10 Wie groß ist φ, wenn das Schnittdreieck ACP mit dem Dreieck ACS übereinstimmt ?
Begründe, dass in diesem Fall das Schnittdreieck ACP maximalen Flächeninhalt besitzt, und gib diesen an.

Raumgeometrie

ebene Schnitte - funktionale Abhängigkeiten

6.1 Das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge 2a bildet die Grundfläche der Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über A mit $\overline{SA} = 3a$ liegt. Zeichne von der Pyramide ABCS mit a = 4 cm ein Schrägbild (q = 0,5; ω = 45°). Die Symmetrieachse AE des Dreiecks ABC mit $E \in [BC]$ soll Rissachse sein.

6.2 Zeige, dass $\sphericalangle ASE = \varphi = 30°$ und $\overline{ES} = 2a\sqrt{3}$ gilt.

6.3 Parallelen zu [BC] schneiden [BS] in P und [CS] in Q. Die Punkte P und Q und der Mittelpunkt M der Strecke [AS] bilden jeweils gleichschenklige Dreiecke PQM. Zeichne ein Dreieck PQM in das Schrägbild ein, und bezeichne den Mittelpunkt der Strecke [PQ] mit F. Berechne die Länge der Strecken [FS] und [PQ] in Abhängigkeit von a und $\sphericalangle FMS = \varepsilon$.
Für welchen Wert von ε gilt $\overline{PQ} = a\sqrt{3}$?

7.0 Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a = 5 cm, die Höhe ist 9 cm lang.
Durch eine Seitenkante des Prismas wird eine Schnittebene gelegt (GHFC).

7.1 Berechne den Umfang u der Schnittfläche in Abhängigkeit von φ und stelle u(φ) für $\varphi \in [0°; 60°]$ mit $\Delta\varphi = 10°$ graphisch dar.
Bestimme Maximum und Minimum des Umfangs.

7.2 Berechne den Flächeninhalt A der Schnittfläche in Abhängigkeit von φ.
Stelle A(φ) graphisch dar und bestimme Minimum und Maximum des Flächeninhalts.

8.0 Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a. Die Höhe des Prismas beträgt $\frac{5}{2}a$. Ein ebener Schnitt wird so geführt, dass er die Seite [AB] enthält. Als Schnittfiguren entstehen gleichschenklige Dreiecke oder Trapeze.

8.1 Berechne den Umfang u der Schnittfläche in Abhängigkeit von a und δ; $\delta \in [0°; 90°]$.
Fallunterscheidung hinsichtlich δ.
Hinweis: Berechne zunächst das Maß δ_0, für welches die Schnittfläche durch F geht.

8.2 Stelle für a = 10 cm eine Wertetabelle für u(δ) mit $\Delta\delta = 10°$ auf.
Zeichne den Graphen und entnimm ihm Maximum und Minimum.