Gymnasium / Realschule

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

Am Ende der Aufgabensammlung finden Sie eine Formelübersicht

Vollkugel, Hohlkugel

1. Berechne den Radius einer Kugel, deren Oberfläche $10\ \text{m}^2$ groß ist.

2. Berechne den Radius einer Kugel, deren Rauminhalt $V = 1\,\text{dm}^3$ groß ist.

3. Kugeln zum Kugelstoßen der Schüler haben die Masse 4 kg.
Welchen Durchmesser müssen diese Kugeln haben ?
(Dichte von Eisen: $r = 7{,}85\ \text{g}/\text{cm}^3$)

4. Welche Oberfläche hat eine Kugel mit dem Rauminhalt $V = 100\ \text{cm}^3$?

5. Aus einem tropfenden Wasserhahn fällt alle 3 Sekunden ein kugelförmiger Wassertropfen von ungefähr 4 mm Durchmesser.
Wieviel Liter Wasser gehen durch den undichten Verschluß innerhalb von 24 Stunden verloren ?

6. Die Durchmesser der Erde und des Mondes stehen im Verhältnis von (gerundet) 11 : 3.
Wie verhalten sich ihre Oberflächen- und Rauminhalte ?

7. Welche mittlere Dichte hat ein Ball von 12 cm Umfang und 38 g Masse ?

8. Berechne die mittlere Dichte der Erde (mittlerer Durchmesser: 12.740 km, Masse $5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$)

9. Die Schülerin Lisa behauptet, daß sie eine Kugel ($r = 10\ \text{cm}$) aus purem Gold leicht tragen könnte. Stimmt die Behauptung ?
(Dichte von Gold: $r = 19{,}3\ \text{kg}/\text{dm}^3$)

10. Eine Holzkugel der Dichte $r = 0{,}65\ \text{kg}/\text{dm}^3$ hat einen Durchmesser von 12 cm.
Bestimme den Radius einer Kugel aus Gold (Dichte $r = 19{,}3\ \text{kg}/\text{dm}^3$) mit der gleichen Masse.

11. Ein kugelförmiger Glaskolben (Innendurchmesser 20 cm) ist vollständig mit Wasser gefüllt. Das Wasser wird in einen Meßzylinder (Innendurchmesser 8 cm) umgefüllt.
Wie hoch steht das Wasser im Meßzylinder ?

12. Das Gebäude eines Kraftwerks besteht aus einem 22 m hohen Zylinder mit 18 m Durchmesser und einer oben aufgesetzten halbkugelförmigen Kuppel.
Berechne den umbauten Raum in m^3.

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

13. Eine Kugel soll das gleiche Volumen erhalten wie ein Kegel mit dem Grundkreisdurchmesser d = 16 cm und der Kegelhöhe h = 62 cm.
Bestimme den Kugelradius.

14. a) Um wie viel Prozent würde sich die Oberfläche einer Kugel verringern, wenn man den Radius der Kugel um 20% verkleinert ?

b) Um wie viel Prozent würde die Oberfläche einer Kugel zunehmen, man den Radius der Kugel um 20% vergrößert ?

15. Um wieviel Prozent würde das Volumen einer Kugel abnehmen, wenn der Radius um 25% verkleinert würde ?

16. Ein zylindrischer Kochtopf (lichte Weite 32 cm, lichte Höhe 16 cm) ist zu 60% mit Wasser gefüllt. Es werden 5 kugelförmige Knödel ins Wasser gelegt (Radius 6cm), die ganz untertauchen.
Wie hoch steht dann das Wasser im Topf , oder wie viel Wasser läuft heraus ?

17. 1 Million Kugeln verdrängen in einem zylinderförmigen Behälter $4\ dm^3$ Flüssigkeit.
Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel ?

18. In einen Meßzylinder (Innendurchmesser 45 mm) mit Millimeterskala wird $150\ cm^3$ Reinigungsbenzin gegeben. Zum Reinigen werden dann 100 Kugellagerkugeln mit einem Durchmesser von 4 mm in das Reinigungsmittel gelegt.
Um wie viele Skaleneinheiten steigt das Reinigungsbenzin an ?

19. 666 kleine Schrotkugeln mit einem Durchmesser von 2,8 mm werden zu einer einzigen Bleikugel verschmolzen ohne daß es dabei zu Verlusten kommt.
Welchen Radius hat die große Bleikugel ?

20. Wie viele Kugellagerkugeln mit dem Durchmesser d = 4 mm kann man aus 10 kg Stahl (Dichte $r = 7{,}85\ kg/dm^3$) herstellen, wenn der Materialverlust bei der Herstellung 12% beträgt ?

21. Gegeben ist eine Kugel mit Durchmesser 20 mm. Wie viele Kugeln mit Durchmesser 3 mm haben zusammen genommen

a) die gleiche Oberfläche wie die gegebene Kugel ?

b) den gleichen Rauminhalt wie die gegebene Kugel ?

22. Wie viele Kugeln lassen sich durch Umschmelzen aus einer Wachskugel von 10 cm Radius herstellen, wenn ihr Radius der sechste Teil des ursprünglichen Radius ist ?

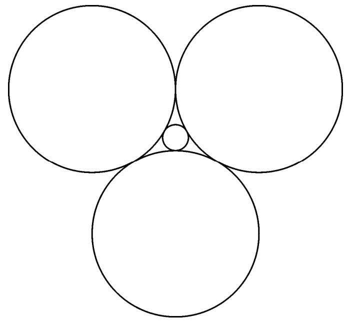
Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

23. Die Mittelpunkte von drei gleich große Kugeln (Radius r) bilden ein gleichseitiges Dreieck und berühren sich gegenseitig. In dem Loch in der Mitte soll eine vierte Kugel so Platz finden, daß ihr Volumen ein Maximum wird.

Wie groß darf das Volumen der vierten Kugel höchstens sein ?



24. Die Flüssigkeit eines Reagenzglases (Innendurchmesser 1,4 cm) wird in einen zylindrischen Messzylinder (Innendurchmesser 2,6 cm) umgefüllt.
Wie hoch steht die Flüssigkeit im Meßzylinder (in cm angeben) ?
Das Reaganzglas ist ein Zylinder mit angeformter Halbkugel. Die Flüssigkeitshöhe im Reagenzglas ist 4 cm.

25. Die Maße einer Hohlkugel aus Stahl sind:
Außendurchmesser: 480 mm, Innendurchmesser: 44 cm. Berechne:

a) Die Wanddicke der Hohlkugel. Die Wanddicke ist als gleichmäßig anzunehmen.
b) Das Volumen des Kugelmaterials
c) Die gesamte Oberfläche der Hohlkugel

26. Ein Gasbehälter hat die Form einer Kugel mit dem Außendurchmesser 18 m und der Blechdicke 18 mm.

a) Wie viel Gas (in m^3) kann der Behälter aufnehmen, wenn er nur zu 90% gefüllt werden darf ?
b) Das Innere der Kugel wurde mit einem Dichtungsmaterial beschichtet. Welche Fläche mußte beschichtet werden ?
c) Berechne die Masse der Hohlkugel ($r = 7{,}85\,kg/dm^3$).

27. Von einer Holzkugel mit dem Radius r = 12 cm wird eine Schicht der Dicke 2 mm abgedreht.
Um wie viel Prozent verringern sich dadurch

a) das Kugelvolumen ?
b) die Kugeloberfläche ?

28. Die Kugel einer Kirchturmspitze hat einen Radius von 22 mm. Sie soll mit 12 g einer Goldlegierung ($r = 16{,}8\,kg/dm^3$) vergoldet werden.
Wie dick (in mm) ist die Goldschicht ?

29. Ein kugelförmiger Tropfen Seifenlauge vom Rauminhalt 2,8 mm^3 wird zu einer Seifenblase mit dem Außendurchmesser 12 mm aufgeblasen.
Berechne die Wanddicke der Seifenblase.

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

30. Eine Hohlkugel aus Kupfer ($r = 8{,}9\,\text{g/cm}^3$) und dem Außenradius $r = 4{,}5\,\text{cm}$ hat die Masse m = 5,2 g. Bestimme die Wanddicke (in mm).

31. Ein Sportball von 94 cm Umfang hat eine 0,6 cm dicke Kunststoffhülle der Dichte $r = 0{,}8\,\text{g/cm}^3$. Welches Gewicht hat der Ball (in kg).

32. Eine Kugel von 1,8 m Durchmesser ist mit einer 0,05 cm dicken Goldschicht versehen worden. Wie viel Kilogramm Gold waren das ($r = 19{,}1\,\text{kg/dm}^3$) ?

33. Innerer und äußerer Radius einer Hohlkugel unterscheiden sich um 2 cm. Die Oberfläche beträgt $1800\,\text{cm}^2$. Berechne die beiden Radien R und r.

34. Welchen Radius hat eine Kugel, deren Oberfläche das doppelte Maß hat wie ihr Rauminhalt ?

35. Die Maßzahlen von Volumen und Oberfläche einer Kugel sind gleich. Berechne den Radius der Kugel.

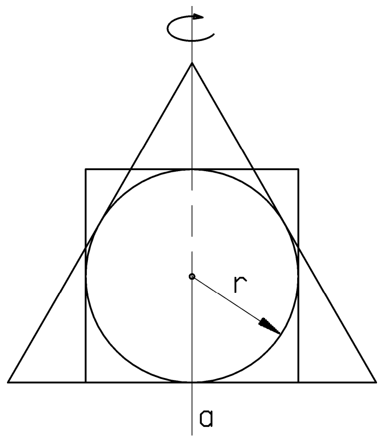
36. Die Oberfläche eines Zylinders ist so groß wie die einer Kugel vom gleichen Radius. Welcher Körper hat das kleinere Volumen ?

37. Ein Kegel und eine Kugel haben das gleiche Volumen. Der Kugelradius r und der Grundkreisradius r des Kegels sind ebenfalls gleich. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der beiden Körper ?

38. Ein Kreis ist gleichzeitig Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks und eines Quadrates (siehe Skizze rechts).

a) Die drei Flächen rotieren um die Achse a. Berechne die Rauminhalte von Zylinder, Kegel und Kugel in Abhängigkeit von r.

b) In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der drei Körper ?



Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

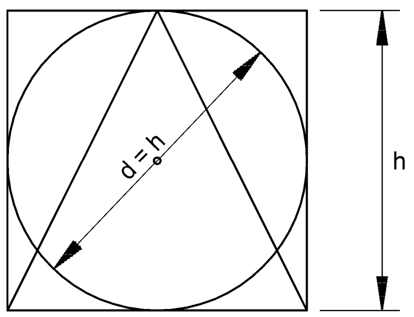
39. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Axialschnitt eines Zylinders, eines Kegels und einer Kugel.

a) Um wie viel Prozent ist die Oberfläche des Zylinders größer als die Oberfläche der Kugel ?

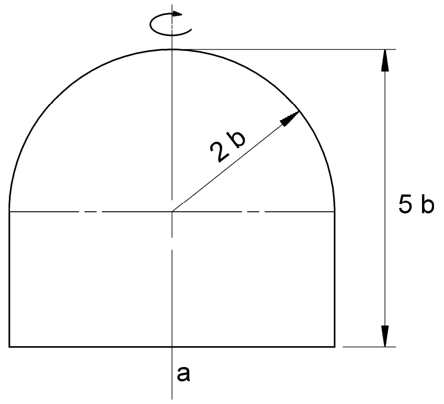
b) Um wie viel Prozent ist die Oberfläche des Kegels kleiner als die Oberfläche der Kugel ?

c) Um wie viel Prozent ist das Kugelvolumen größer als das Kegelvolumen ?

d) Um wie viel Prozent ist das Zylindervolumen größer als das Kugelvolumen ?



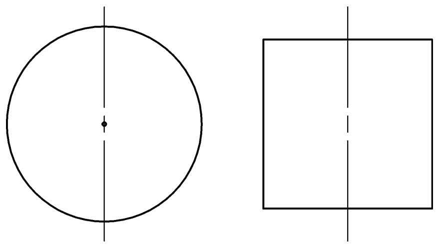
40. Berechne die gesamte Oberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von b.



41. Ein Kreis und ein Quadrat - beide flächengleich, rotieren um ihre Mittelachsen. Man erhält eine Kugel und einen Zylinder.
In welchem Verhältnis stehen

a) die Rauminhalte $\left(V_{Zyl} : V_{Kug}\right)$

b) die Oberflächen der beiden Körper.



42. Eine Glaskugel mit 11 cm Durchmesser wird in einen kleinstmöglichen zylinderförmigen Karton verpackt.

a) Bestimme die Oberfläche des Kartons.

b) Ein Glasmacher hat die Kugel aus einem 2,8 cm dicken kugelförmigen Glastropfen angefertigt. Wie dick ist die Wand der Glaskugel ?

43. Einer Kugel mit Radius $r = 6\text{ cm}$ ist ein Würfel einbeschrieben.

a) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Würfels.

b) Um wie viel Prozent ist die Kugeloberfläche größer als die Oberfläche des Würfels ?

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

44. Einem Kegel mit dem Grundkreisradius $r = 5\text{ cm}$ und der Höhe h ist eine Kugel einbeschrieben.

a) Zeichne für $h = 8\text{ cm}$ einen Axialschnitt des Kegels mit Kugel.

b) Berechne den Radius r der Inkugel **in Abhängigkeit von h**.

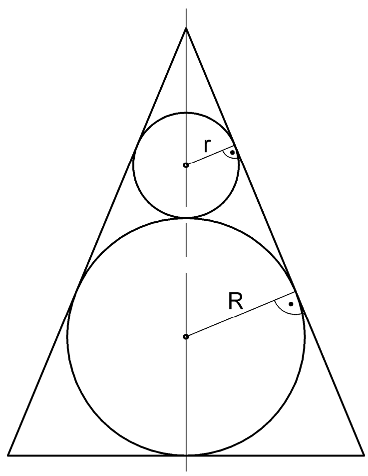
45. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder der Höhe h = 0,8 r einbeschrieben.
Berechne das Verhältnis der Rauminhalte beider Körper.

46. Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben. Seine Oberfläche ist halb so groß wie die Kugeloberfläche.
Berechne den Radius und die Höhe des Zylinders **in Abhängigkeit vom Kugelradius R**.

47. Einer Kugel vom Radius R ist ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius $r = 0{,}5R$ einbeschrieben.
Wie groß ist das Kegelvolumen ?

48. Einem Würfel mit der Kantenlänge a ist eine Kugel einbeschrieben und eine zweite Kugel umbeschrieben.
Bestimme die Volumina der beiden Kugeln **in Abhängigkeit von a**.

49. Zwei sich berührende Kugeln (R = 12 cm und r = 3 cm) werden außen von einem Kegel umschrieben.
(Skizze nicht maßstäblich)



a) Berechne die Kegelhöhe h, den Grundkreisradius r und die Kegelmantellänge s.

b) In welchem Verhältnis stehen Mantelfläche und Grundfläche des Kegels ?

50. Vergrößert man den Radius einer Kugel um 5 cm, so hat die neue Kugel eine um 590 cm^2 größere Oberfläche.
Berechne die Radien und die Rauminhalte der beiden Kugeln.

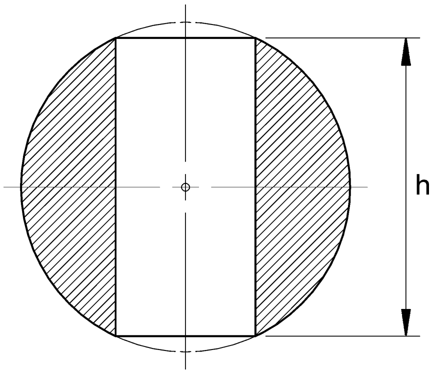
Gymnasium / Realschule

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

51. Bestimme das Volumen der zylindrisch durchbohrten Kugel **in Abhängigkeit von h**.



52. Eine Hohlkugel aus einer Metallegierung (Dichte $r = 8{,}3\ kg/dm^3$) und dem Außendurchmesser d = 18 cm sinkt bis zur Hälfte in Wasser (Dichte $r = 1{,}0\ kg/dm^3$) ein. Berechne die Wandstäke s der Hohlkugel.

53. Eine Hohlkugel mit 12 cm Außendurchmesser und 3,8 mm Wandstärke schwimmt in Wasser (Dichte $r = 1{,}0\ kg/dm^3$) und taucht genau zur Hälfte ein.

Bestimme die Dichte des Kugelmaterials.

Halbkugel, Kugelschicht, Kugelzone, Kugelsektor, Kugelhaube

54. Bei einer Halbkugel ist die Maßzahl der Oberfläche gleich der Maßzahl des Rauminhaltes.
Welchen Radius hat diese Halbkugel ?

55. Eine Kugel mit dem Radius R und eine Halbkugel mit dem Radius r haben beide das gleiche Volumen.
In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen von Kugel und Halbkugel ?

56. Eine Kugel mit $V = \frac{4}{3} \times p^4$ wird von einer Ebene im Abstand $\frac{p}{2}$ vom Kugelmittelpunkt aus geschnitten. Berechne die Größe der Schnittfläche.

57. Einer Halbkugel ist ein Zylinder umbeschrieben und ein Kegel einbeschrieben.
In welchem Verhältnis stehen die drei Rauminhalte ?

58. Der Innendurchmesser eines kugeligen Heizöltanks beträgt 2 m.

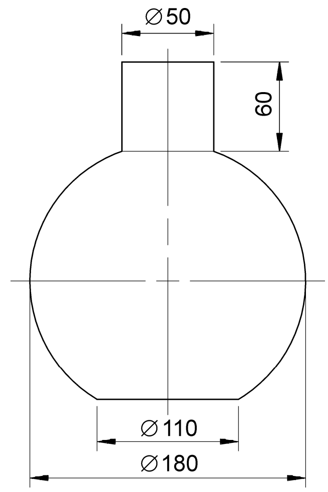
Wie viel Liter könnten noch in den Tank gefüllt werden, wenn das Öl 50 cm hoch steht ?

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

59. Berechne den Rauminhalt des Rundkolbens wenn eine Flüssigkeit randvoll eingefüllt ist ? Welche innere Fläche weist der Glasbehälter auf wenn eine Flüssigkeit bis zum oberen Rand eingefüllt ist ?



Maße in mm

60. Welche Fläche der Erdkugel kann man in einer Höhe von 2000 m überblicken ? (mittlerer Erdradius: 6.370 km)

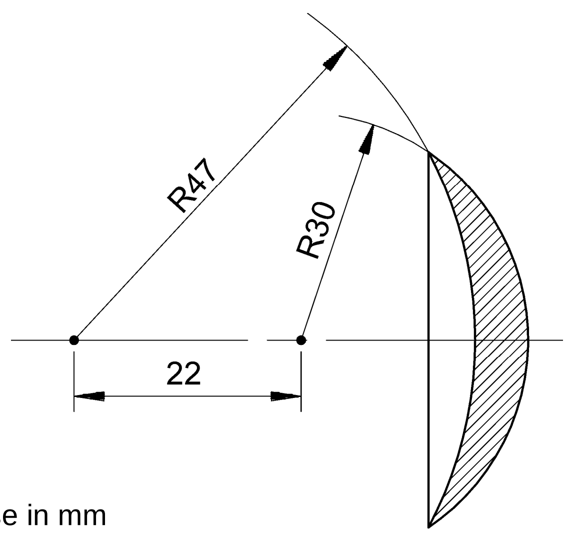
61. Der erste Kosmonaut erreichte seine größte Höhe bei 302 km über der Erdoberfläche.

a) Welche Fläche auf der Erde konnte der Kosmonaut im besten Fall überblicken ?

b) Wie viel Prozent der Erdoberfläche waren in diesem Fall zu sehen ? (mittlerer Erddurchmesser: 12.740 km)

62. Eine homogene Holzkugel (d = 12 cm) schwimmt im Wasser (Dichte $r = 1{,}0\ kg/dm^3$).
Der trockene Teil der Kugel (Kugelhaube) hat einen Durchmesser von 10 cm.
Berechne die Dichte des Holzes.

63. Die Linse einer Brille wird von zwei Kugelflächen gebildet.
Berechne das Volumen der Linse.



Maße in mm

Kugel und Kugelteile / Kegel / Zylinder

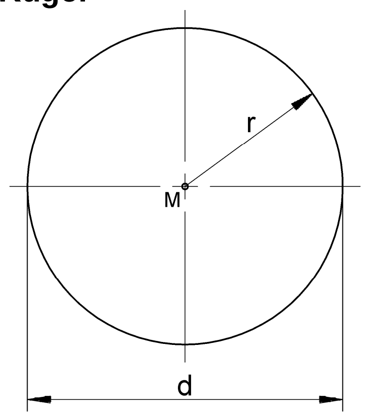
1. Definitionen

Es werden folgende Symbole verwendet:

r	Kugel-, Kegel-, Zylinderradius	M	Mittelpunkt der Kugel
d	Kugel-, Kegel-, Zylinderdurchmesser	V	Volumen (Rauminhalt) Kugel, Kugelteil, Kegel, Zylinder
r	Radius eines Schnittkreises		
h	Höhe eines Kugelabschnitts, einer(s) Kugelteil, Kugelzone, Kegels oder Zylinders	O	Oberflächeninhalt Kugel, Kegel, Zylinder
s	Länge der Kegelmantellinie	A_{Mantel}	Mantelfläche

2. Formeln

Kugel



Volumen

$$V = \frac{4}{3} p r^3$$

$$V = \frac{p}{6} d^3$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{p} O^3}$$

Oberfläche

$$O = 4 p r^2$$

$$O = d^2 p$$

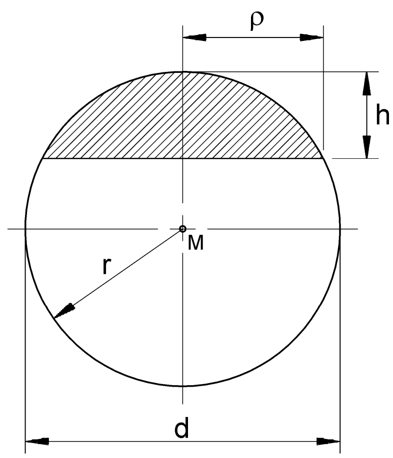
$$O = \sqrt[3]{36 p V^2}$$

Kugelradius

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p} O}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4 p} V}$$

Kugelabschnitt - Kugelsegment - Kugelkappe



Volumen

$$V = \frac{p}{6} h\left(3r^2 + h^2\right)$$

$$V = \frac{p}{3} h^2 \left(3r - h\right)$$

$$V = \frac{p}{6} h^2 \left(3d - 2h\right)$$

Fläche der Kappe

$$A_{Mantel} = 2prh$$

$$A_{Mantel} = dph$$

$$A_{Mantel} = p\left(r^2 + h^2\right)$$

Oberfläche

$$O = p\left(2rh + r^2\right)$$

$$O = p\left(h^2 + 2r^2\right)$$

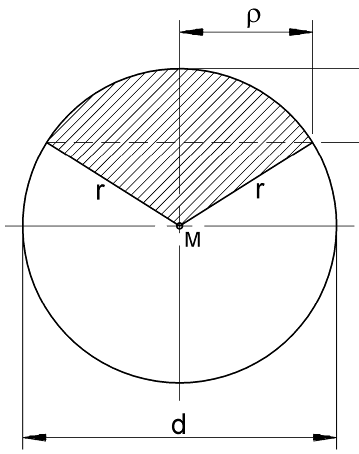
$$O = ph\left(4r - h\right)$$

Radius des Schnittkreises:

$$r = \sqrt{h\left(2r - h\right)}$$

Kugel und Kugelteile / Kegel / Zylinder

Kugelausschnitt - Kugelsektor



Volumen

$$V = \frac{2}{3}\, p r^2 h$$

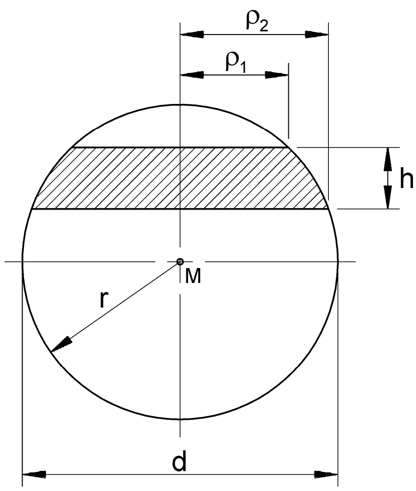
$$V = \frac{p}{6}\, d^2 h$$

Oberfläche

$$O = p r\,(2h + r)$$

$$O = 2pr\left(h + \frac{1}{2}\sqrt{h(2r - h)}\right)$$

Kugelschicht - Kugelzone



Volumen

$$V = \frac{p}{6}\, h\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$$

Mantel (ohne Deckflächen)

$$A_{Mantel} = 2prh$$

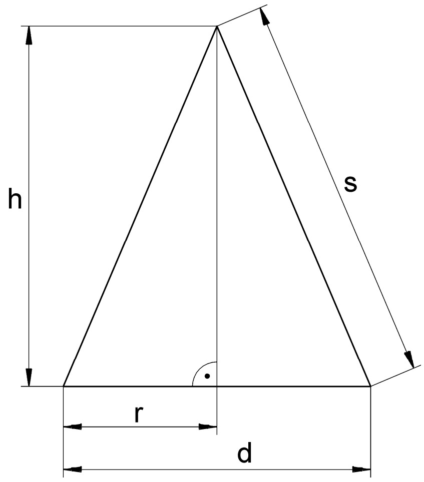
$$A_{Mantel} = dph$$

Oberfläche

$$O = p\left(2rh + r_1^2 + r_2^2\right)$$

$$O = p\left(dh + r_1^2 + r_2^2\right)$$

Gerader Kegel



Volumen

$$V = \frac{1}{3}\, p r^2 h$$

Mantel

$$A_{Mantel} = rps$$

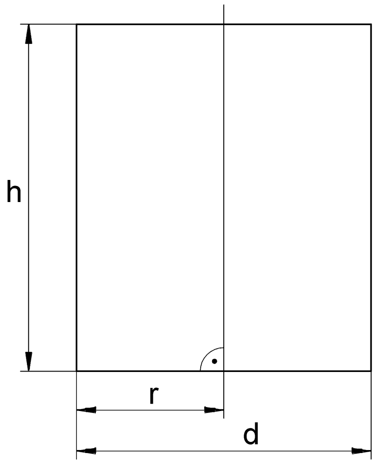
Oberfläche

$$O = rp(r + s)$$

Länge der Kegelmantellinie: $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Kugel und Kugelteile / Kegel / Zylinder

Gerader Zylinder



Volumen

$$V = r^2 \pi h$$

$$V = \frac{d^2 \pi}{4} \times h$$

Mantel

$$A_{Mantel} = 2 \pi r h$$

$$A_{Mantel} = d \pi h$$

Oberfläche

$$O = 2 \pi r (r + h)$$

$$O = d \pi \left(\frac{d}{2} + h \right)$$