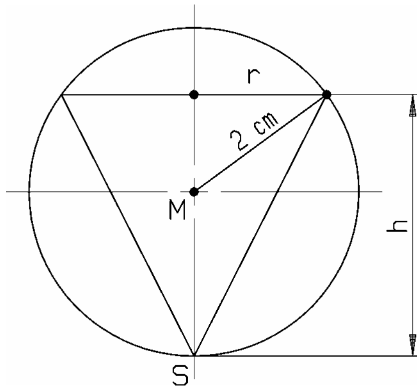
Raumgeometrie - Kegel, Kugel

1.0 Gegeben ist eine Kugel mit Radius 2 cm. In diese Kugel sind gerade Kreiskegel mit Radius r einbeschrieben (Kegelschar); die Kegelachse liegt auf der Kugelachse und die Kegelhöhe h ist variabel.
Die nebenstehende Zeichnung zeigt einen Axialschnitt.



1.1 Berechne Volumen und Oberfläche der Kugel.

1.2 Stelle eine Gleichung auf für den Kegelradius r in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h.

(Ergebnis: $r_{(h)} = \sqrt{h(4-h)}$ cm)

1.3 Stelle eine Gleichung auf für die Mantelfläche $M_{(h)}$ der Kegel in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h.

(Ergebnis: $M_{(h)} = 2\,\pi\,h\,\sqrt{4-h}$ cm^2)

1.4 Stelle eine Gleichung auf für das Volumen $V_{(h)}$ der Kegel in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h.

(Ergebnis: $V_{(h)} = \frac{1}{3}\,\pi\,h^2(4-h)$ cm^3)

1.5 Erstelle jeweils eine Wertetabelle für die Funktionen aus 1.2, 1.3 und 1.4 in Schritten von $\Delta h = 0{,}5$ für $h \in [0;\,4]$.
Zeichne die zugehörigen Graphen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem.
Abszissenachse (x-Achse) ist h, Ordinatenachse (y-Achse) ist $r_{(h)}$, $M_{(h)}$ bzw. $V_{(h)}$.
Für die Zeichnung: x-Achse: 1LE = 2 cm;
y-Achse: 1LE = 2cm, bzw. 1 FE = 0,5 cm, bzw. 1 VE = 1 cm
(LE = Längeneinheit, FE = Flächeneinheit, VE = Volumeneinheit)

1.6 Berechne das Kegelvolumen und die Kegelmantelfläche für den Fall, daß der Axialschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck ist.

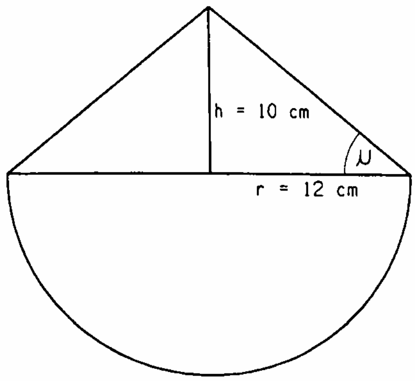
1.7 Berechne das Kegelvolumen und die Kegelmantelfläche für den Fall, daß der Axialschnitt des Kegels ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist (der rechte Winkel befindet sich bei der Kegelspitze S).

1.8 Wird der Kegelmantel in die Ebene abgewickelt so entsteht ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel φ.
Stelle eine Gleichung für φ in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h auf.

1.9 Von einem bestimmten Kegel aus der Schar wird dessen Mantel in die Ebene abgewickelt. Der Kreissektor des Kegelmantels hat den Mittelpunktswinkel $\varphi = 270°$.
Berechne für diesen Kegel sein Volumen und seine Oberfläche.

1.10 Für den Kegel aus Pkt. 1.6 ist die Mantelabwicklung ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel φ_1. Berechne φ_1.

2.0 Gegeben ist eine Halbkugel, der ein gerader Kreiskegel aufgesetzt ist (siehe nebenstehende Skizze). Verkürzt man den Radius um x cm und verlängert man gleichzeitig die Höhe des Kegels um 10x cm, so entstehen neue Körper.



2.1 Berechne das Volumen der Körper in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $V_{(x)} = \frac{1}{3}\pi\left(8x^3 - 158x^2 + 336x + 4896\right)cm^3$)

2.2 Tabellarisiere V(x) für $x \in [\,0;\ 12\,[$ mit $\Delta x = 1$.

2.3 Zeichne ein Diagramm und entnimm der Zeichnung den Extremwert.

Maßstab: 1 LE entspricht 1 cm für den x - Wert;
1 LE entspricht 500 cm^3 für den V(x) - Wert

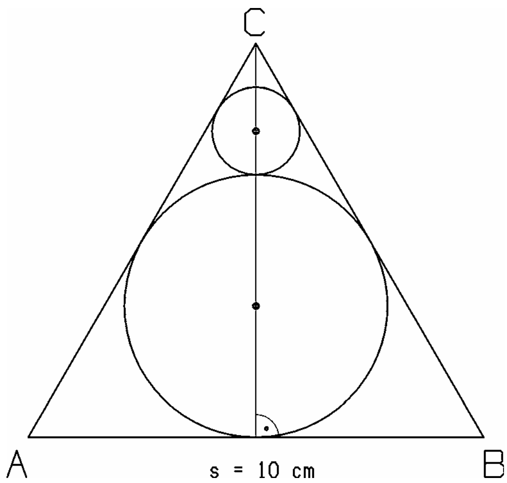
2.4 Berechne das Maß des Winkels μ für den ursprünglichen Körper. Berechne ferner dasjenige x, damit μ = 60° wird.

3. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s = 10 cm ist Schnittdreieck eines geraden Kreiskegels. Der Kegelschnitt erfolgte durch die Mittelachse des Kegels.

In diesem Kegel sind zwei Kugeln einbeschrieben entsprechend nebenstehender Skizze. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Kugeln ? ($V_1 : V_2$)

V_1 = Volumen der kleinen Kugel

V_2 = Volumen der großen Kugel



Wenn auf die zweite Kugel noch eine dritte, auf die dritte Kugel noch eine vierte usw. gesetzt wird, wie groß ist das Gesamtvolumen aller unendlich vielen Kugeln für die Seitenlänge s ?

4. Einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basislänge AB = 10 cm und der Dreieckshöhe h = 6 cm ist ein Halbkreis einbeschrieben. Rotiert diese Figur um die Mittelachse, so entsteht als Rotationskörper ein Kreiskegel mit einbeschriebener Halbkugel.

Berechne das Volumen der Halbkugel.

Berechne das Volumen des Restkörpers, den man erhält, wenn man die Halbkugel dem Kegel entnimmt.

5. Das gleichschenklige Dreieck ABC ($\overline{AB}$ ist Basis) mit der Höhe h = 8 cm und $\overline{AB}$ = 12 cm rotiert um die Höhe h. Als Rotationskörper entsteht ein Kreiskegel.

a) Zeichne einen Axialschnitt des Kreiskegels und berechne die Länge der Mantellinie s, das Volumen und die Mantelfläche des Kegels.

b) Dem Kegel wird eine Kugel einbeschrieben (Die Kugel berührt die Mantelfläche und die Grundfläche des Kegels).

Zeichne den Kreis der Kugel in den Axialschnitt ein.

Berechne das Volumen und die Oberfläche der Kugel.