Raumgeometrie

Zylinder, Kegel, Kugel - funktionale Abhängigkeiten

1.0 Ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{AB} = c = 8\text{ cm}$ und $\overline{BC} = a = 6\text{ cm}$ wird um AB als Achse gedreht. Es soll das Volumen des Drehkörpers und der Inhalt der Oberfläche in Abhängigkeit von β bestimmt werden.

1.1 Zeichne die Graphen zu $V(\beta)$ und $O(\beta)$ nach Erstellen einer Wertetabelle ($\Delta\beta = 30°$).

1.2 Die Oberfläche hat für $\beta_0 \in [90°; 180°[$ ihren größten Inhalt.
Berechne in diesem Bereich $O(\beta)$ in Schritten von $\Delta\beta = 10°$ und zeichne den Graphen möglichst genau. Ermittle aus der Zeichnung β_0 und $O(\beta_0)$.

2.0 Gleichschenklige Dreiecke ABC mit 6 cm langen Schenkeln [AC] und [BC] und dem Winkel γ an der Spitze ($\gamma_0 \in]0°; 180°[$) rotieren um die Achse AB.

2.1 Zeichne für $\gamma = 30°$ den Axialschnitt des Rotationskörpers.

2.2 Stelle das Volumen $V\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von $\frac{\gamma}{2}$ dar.

2.3 Rotieren die Dreiecke ABC um eine zu [AB] parallele Achse s, die durch die Spitze C verläuft, so erhält man Rotationskörper im doppeltem Volumen. Weise dies durch Rechnung nach.

3.0 Rauten ABCD mit $\overline{BD} = 10\text{ cm}$ rotieren um eine zu [BD] parallele Achse s, die durch den Eckpunkt A verläuft. Der Winkel BAD hat das Maß α.

3.1 Zeichne für $\alpha = 60°$ den Axialschnitt durch den Rotationskörper im Maßstab 1:2.

3.2 Ermittle das Volumen der Rotationskörper in Abhängigkeit von α bzw. $\frac{\alpha}{2}$.

4.0 Gegeben ist ein Kreiskegel mit dem Achsenschnitt ABS und dem Grundkreismittelpunkt M. $\overline{SM} = \overline{BM} = 4\text{ cm}$. Ein Punkt P bewegt sich auf der Mantellinie [SB] von B nach S. Das Maß des Winkels $\sphericalangle BMP_n$ ist α_n.

4.1 Berechne $\overline{P_1M}$ für $\alpha_1 = 30°$.

4.2 P_2 sei der Punkt, für den $\overline{PM}$ minimal wird. Bestimme $\overline{P_2M}$ und α_2.

4.3 Berechne α_3 so, dass ΔMBP_3 gleichschenklig wird. Berechne auch die Seitenlängen des Dreiecks MBP_3 (zwei Möglichkeiten).

Raumgeometrie

Zylinder, Kegel, Kugel - funktionale Abhängigkeiten

5.0 Das Dreieck ABS ist das Axialschnittdreieck eines geraden Kreiskegels. Der Mittelpunkt des Grundkreises ist M. Es gilt $\overline{SM} = 8\text{ cm}$, $\overline{AM} = \overline{MB} = 4\text{ cm}$.

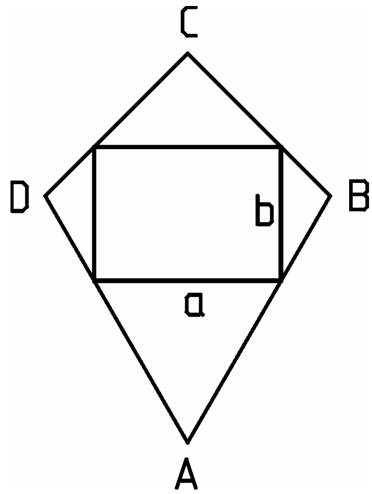
5.1 Ein Punkt P bewegt sich auf der Mantellinie [SB] von B nach S. Das Maß des Winkels BMP ist α. Zeige, dass $\overline{PM}$ in Abhängigkeit von α wie folgt dargestellt werden kann:
$\overline{PM} = \dfrac{8\text{ cm}}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ und $\overline{PM} = \dfrac{\sqrt{12{,}8}\text{ cm}}{\sin\left(\alpha + 63{,}4°\right)}$.

5.2 Begründe algebraisch und geometrisch, dass $\overline{PM}$ für α_0 = 26,6° am kürzesten ist.

5.3 Wenn t = sinα + 2 cosα mit t > 0 den größten Wert annimmt, ist $\overline{PM}$ am kleinsten. Zeige, dass man t = sinα + 2 cosα durch quadratische Ergänzung auf die Form $\left(\sin\alpha - \dfrac{t}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{25}t^2$ bringen kann. Berechne daraus t_{max} und damit $\overline{PM}_{min}$ sowie aus $\sin\alpha_0 = \dfrac{t_{max}}{5}$ dann α_0.

Raumgeometrie

Zylinder, Kegel, Kugel - funktionale Abhängigkeiten



6.0 Ein Drachen ABCD ist festgelegt durch:
A(0/0), B(3/6), C(0/9).

6.1 Dem Drachen werden Rechtecke einbeschrieben (siehe Skizze).
Stelle die Länge a als Funktion der Breite b dar.

(Zwischenergebnis: $a = 6 - \frac{2}{3}b$ cm).

6.2 Stelle die Flächeninhalte der Rechtecke als Funktion von b dar.

[Zwischenergebnis: $A_{(b)} = (-\frac{2}{3}b^2 + 6b)$ cm^2]

6.3 Wie lauten Definitions- und Wertemenge der Funktion $A = -\frac{2}{3}b^2 + 6b$?

6.4 Zeichne den Graphen der Funktion aus 6.2 in ein Koordinatensystem ein.

6.5 Entnehme dem Graphen das Intervall für b, in dem die Flächeninhalte kleiner als 11 cm^2 werden.

6.6 Berechne nun die Intervallgrenzen von 6.5 auf zwei Nachkommastellen.

6.7 Der Drachen mit den einbeschriebenen Rechtecken rotiert um die Symmetrieachse. Es entsteht ein Doppelkegel mit einbeschriebenen Zylindern.

6.8 Berechne das Volumen des Doppelkegels.

6.9 Stelle die Volumina der Zylinder als Funktion von b dar.

(Zwischenergebnis: $V_{(b)} = \frac{\pi}{9}\left(b^3 - 18b^2 + 81b\right)\text{cm}^3$)

6.10 Tabellarisiere die Funktion aus 6.9 für $b \in [0; 9]$ und $\Delta b = 1$ und zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem (V-Achse: 10 cm^3 = 1LE)

6.11 Entnimm dem Graphen die Belegung von b, die den Zylinder mit maximalem Volumen liefert.