Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Rechtecke mit dem Umfang u = 24 cm und den Seitenlängen a und b rotieren um die Rechteckbreite b.

1.1 Stelle die Mantelfläche der entstehenden Zylinder als Funktion der Rechtecklänge a dar.

[Ergebnis: $M_{(a)} = (-2a^2\pi + 24a\pi)\text{cm}^2$]

1.2 Welcher Wert von a liefert die maximale Mantelfläche (Extremwert) ?

2.1 Eine zylindrische Blechdose soll ein Volumen von 194,779 cm^3 erhalten.

2.2 Stelle die Oberfläche der Dose als Funktion des Zylinderradius r dar.

[Ergebnis: $O_{(r)} = 2\pi\,(r^2 + \frac{62}{r})\ \text{cm}^2$]

2.3 Ermittle den minimalen Bedarf an Blech (O_{min}) mittels einer Wertetabelle und geeigneten Iterationsschritten auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet. Technisch sinnvolle Werte für den Zylinderradius: $1\text{ cm} \leq r \leq 7\text{ cm}$

3.0 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 5$ cm und der Höhe $h_c = 10$ cm.

3.1 Dem Dreieck werden Rechtecke DEFG einbeschrieben mit D, E $\in$ [AB]; F $\in$ [BC] und G $\in$ [AC]. Es gilt: $\overline{DE} = y$ cm; $\overline{EF} = x$ cm.
Zeichne das Dreieck ABC und das einbeschriebene Rechteck für y = 2.

3.2 Stelle die Länge der Strecke [DE] in Abhängigkeit von der Maßzahl x dar.

(Ergebnis: $y = 5 - \frac{x}{2}$)

3.3 Bestimme rechnerisch die Größe von x so, daß das einbeschriebene Rechteck ein Quadrat wird.

3.4 Das Dreieck und die einbeschriebenen Rechtecke rotieren um die Achse [MC], wobei M der Mittelpunkt der Seite [AB] ist.
Bestimme die Mantelfläche der entstehenden Zylinder in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $M_{(x)} = \frac{\pi}{2}\left(10x - x^2\right)$)

3.5 Gibt es unter den entstehenden Zylindern solche, die die Mantelfläche $M = \frac{5}{2}\pi$ besitzen ? (Rechnerische Bestimmung)

3.6 Der Mantel des entstehenden Drehkegels aus 2.4 wird abgewickelt.
Bestimme rechnerisch das Maß des Mittelpunktswinkels φ der Abwicklung.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

4.0 Ein gerader Kreiskegel hat den Grundkreisradius r = 5 cm und die Höhe h = 12 cm. Diesem Kegel werden Zylinder einbeschrieben. Die einbeschriebenen Zylinder stehen auf der Grundfläche des Kegels und berühren den Kegelmantel. Die Höhe der einbeschriebenen Zylinder ist x cm, der Radius des Grundkreises beträgt y cm.

4.1 Der Kegel mit dem einbeschriebenen Zylinder wird längs der Kegelachse geschnitten. Zeichne die Schnittfigur.

4.2 Stelle die Mantelfläche der einbeschriebenen Zylinder in Abhängigkeit von x dar
(<u>Ergebnis:</u> $M_{(x)} = \frac{5}{6}\pi\left(-x^2 + 12x\right)$)

4.3 Es gibt einbeschriebene Zylinder mit der Mantelfläche $\frac{45}{2}\pi$ cm^2.
Ermittle rechnerisch die zugehörige Belegung für x.

4.4 Der Mantel des Kegels aus 1.0 wird abgewickelt. Bestimme das Maß des Mittelpunktswinkels φ der Abwicklung.

5.0 Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung y = - 1,25x + 8.
Sie schneidet die x-Achse im Punkt P und die y-Achse im Punkt Q. Der Punkt A sei der Koordinatenursprung.

5.1 Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem, und berechne das Maß des Winkels APQ.
<u>Für die Zeichnung:</u> $-1 \le x \le 7$; $-1 \le y \le 8$; 1 LE = 1cm

5.2 Der Punkt C wandert auf der Geraden g von Q nach P und legt Rechtecke $AB_nC_nD_n$ mit $B_n \in$ x-Achse fest. Zeichne ein beliebiges Rechteck ABCD in das Koordinatensystem ein.

5.3 Die Rechtecke $AB_nC_nD_n$ rotieren um die y-Achse. Stelle die Mantelfläche der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n dar.
(<u>Ergebnis</u>: $A(x) = \pi\,(-2{,}5\,x^2 + 16\,x)$ FE)

5.4 Aus dem Dreieck APQ werden die Rechtecke $AB_nC_nD_n$ herausgeschnitten.
Die verbleibenden Restflächen rotieren ebenfalls um die y-Achse. Stelle den Rauminhalt der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n dar.
(<u>Ergebnis</u>: $V(x) = \pi\,(1{,}25\,x^3 - 8\,x^2 + 109{,}23)$ VE)

5.5 Tabellarisiere V(x) im Intervall [0; 6] mit $\Delta x = 1$ (1 Kommastelle), und stelle die Abhängigkeit graphisch dar.
<u>Für die Zeichnung:</u> 1 LE = 1cm; 1 LE auf der x-Achse = 1 cm
1 LE auf der V-Achse = 50 VE

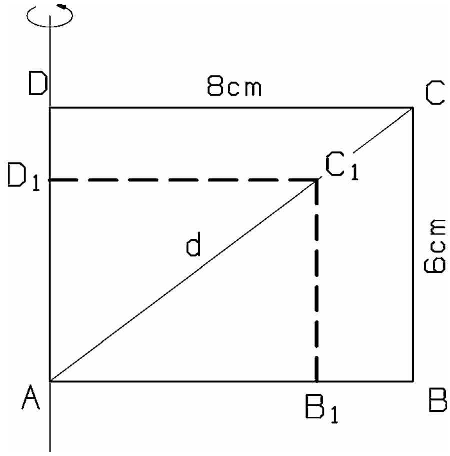
5.6 Zeichne auf der x-Achse des Graphen zu 2.5 den Bereich ein, für den V(x) kleiner als 250 VE ist.

5.7 Berechne den Inhalt der Oberfläche des Rotationskörpers von 2.4 für den Punkt C_1 mit x = 2,5.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

6.0 Ein Rechteck ABCD mit den Seiten [AB] = 8 cm und [BC] = 6 cm rotiert um AD als Achse. Verkürzt man die Diagonale [AC] von C aus um a cm, so entstehen neue Rechtecke $AB_nC_nD_n$ und somit auch neue Zylinder (0 < a < 10).



6.1 Stelle eine Gleichung auf für die Mantelfläche in Abhängigkeit von a.

6.2 Stelle eine Gleichung auf für das Volumen in Abhängigkeit von a.

7.0 Ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen [AB] = 4 cm und [BC] = 12 cm rotiert um die längere der beiden Seiten. Es entsteht als Rotationskörper ein Zylinder.

7.1 Berechne das Volumen V und die Mantelfläche M des Zylinders.

7.2 Man erhält neue Zylinder, wenn man den Grundkreisradius [AB] um x cm verlängert und die Höhe [BC] um x cm verkürzt.

7.3 Stelle die Mantelfläche $M_{(x)}$ der Zylinder in Abhängigkeit von x dar.

7.4 Ermittle rechnerisch die Belegung von x, für die man den Zylinder mit der größten Mantelfläche M_{max} erhält.

7.5 Zeige, daß für das Volumen $V_{(x)}$ der Zylinder in Abhängigkeit von x gilt:
$V_{(x)} = \pi \cdot (-x^3 + 4x^2 + 80x + 192)\ cm^3$

7.6 Tabellarisiere $V_{(x)}$ für $x \in [0; 12]$ mit $\Delta x = 1$.
Stelle $V_{(x)}$ in Abhängigkeit von x grafisch dar.

7.7 Entnimm aus dem Graphen die x-Werte, für die die zugehörigen Zylinder das größte bzw. kleinste Volumen haben.

8.0 Die Grundfläche eines geraden Kegels ist ein Kreis mit dem Durchmesser d = 10 cm.

8.1 Stelle die Höhe h in Abhängigkeit von Maß γ des Öffnungswinkels dar.

8.2 Zeichne den Graphen von $h(\gamma)$ in einem sinnvoll gewählten Intervall für γ ($\Delta\gamma = 20°$).

8.3 Stelle den Inhalt O der Oberfläche in Abhängigkeit von γ dar.

8.4 Zeichne den Graphen von $O(\gamma)$.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

9.0 Eine Menge von geraden Kreiskegeln ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Kegel gleichlange Mantellinien (Länge s) haben, die aber von Kegel zu Kegel verschieden große Neigungswinkel (Maß α) mit der Grundfläche einschließen.

9.1 Stelle Volumen V und Mantelflächeninhalt M der Kegel in Abhängigkeit von s und α dar.

$$\left(\text{Ergebnis: } V(s;\alpha) = \frac{\pi}{3}s^3 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha;\ \ M(s;\alpha) = s^2\pi \cdot \cos\alpha\right)$$

9.2 Begründe algebraisch, dass es für $0° < \alpha < 90°$ keine Kegel mit extremem Mantelflächeninhalt gibt.

9.3 Tabellarisiere $V(\alpha)$ für s = 6 cm im Intervall $0° \leq \alpha \leq 90°$ in Schritten von $\Delta\alpha = 10°$, zeichne den Graphen von $V(\alpha)$ und bestimme graphisch den extremen Wert des Volumens.

10.0 Ein Dreieck ABC hat die Seitenlängen a = 3 cm und b = 5 cm. Das Dreieck wird um die Achse AB gedreht.

10.1 Berechne den Oberflächeninhalt O in Abhängigkeit von β.

(Ergebnis: $O(\beta) = 24\pi\ \sin\beta\ \ \text{cm}^2$)

10.2 Tabellarisiere $O(\beta)$ mit $\Delta\beta = 20°$ und zeichne den Graphen.

10.3 Bestimme den Wert β_0, für den $O(\beta)$ maximal wird. Gib diesen maximalen Wert an.

11.0 Die parallelen Seiten eines Trapezes ABCD sind [AB] und [CD]. Ferner gilt: $\alpha = 90°$, $\beta \in]0°;\ 90°[$. Das Trapez rotiert um die Seite [AB] als Achse.

11.1 Stelle das Volumen V des Drehkörpers in Abhängigkeit von $c = \overline{CD}$, $d = \overline{AD}$ und β dar.

$$\left(\text{Ergebnis: } V(c;d;\beta) = \pi d^2\left(c + \frac{d}{3\tan\beta}\right)\right)$$

11.2 Tabellarisiere $V(c;d;\beta)$ für c = 8 cm und d = 6 cm in Schritten von $\Delta\beta = 10$.
Stelle $V(\beta)$ graphisch dar.

12.0 Für Trapeze ABCD mit den parallelen Grundlinien [AB] und [CD] gilt $\overline{AB} = 12{,}8\text{ cm}$, $\overline{AD} = 6\text{ cm}$, $\beta = \gamma = 90°$.

12.1 Berechne den Flächeninhalt der Trapeze in Abhängigkeit von $\alpha = \sphericalangle BAD$.

(Ergebnis: $A(\alpha) = (76{,}8 \cdot \sin\alpha - 9 \cdot \sin 2\alpha)\text{cm}^2$)

12.2 Tabellarisiere $A(\alpha)$ für $\alpha \in [0°;\ 180°[$ mit $\Delta\alpha = 15°$, und zeichne ein Diagramm.
Für die Zeichnung: α-Achse: 1 cm entspricht 10°
A-Achse: 1 cm entspricht 10 cm^2

12.3 Die Trapeze rotieren um die Achse AB. Berechne das Volumen der Rotationskörper in Abhängigkeit von α.

