Raumgeometrie – schiefe Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ ist die Grundfläche einer schiefen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche. Es gilt: $e = 10\,\text{cm}$; $f = 8\,\text{cm}$; $\overline{DS} = h = 6\,\text{cm}$.
Verlängert man die Diagonale [AC] über A und C hinaus jeweils um x cm und verkürzt [DS] von S aus um x cm, so erhält man neue Pyramiden $A_nBC_nDS_n$.

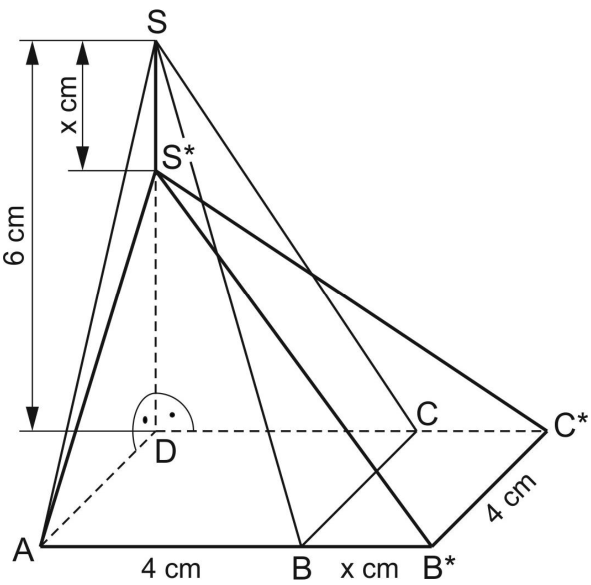
1.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit AC als Schrägbildachse, sowie $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$. Zeichne ferner die für $x_1 = 2$ neu entstandene Pyramide $A_1BC_1DS_1$ in das Schrägbild ein.

1.2 Stelle das Volumen der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x dar.

1.3 Ermittle den Extremwert für das Volumen und gib an, um welche Art von Extremwert es sich handelt.

1.4 Für welche Werte von x wird der Flächeninhalt des Schnittdreiecks BDS_n der Pyramiden kleiner als 14 cm^2 ?

2.0 Gegeben ist eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD. Die Seiten des Quadrates sind 4 cm, die Höhe [DS] ist 6 cm lang. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche.
Man erhält neue Pyramiden AB*C*DS* mit rechteckiger Grundfläche, wenn man die Seiten [AB] und [DC] um x cm verlängert und gleichzeitig die Höhe [DS] um x cm kürzt.



2.1 Ermittle das Volumen V(x) der Pyramiden AB*C*DS* in Abhängigkeit von x.

2.2 Für welchen x-Wert erhält man eine Pyramide mit 20 cm^3 Volumen?

2.3 Ermittle rechnerisch die Zahl für x, damit die Pyramide mit dem kleinsten Volumen entsteht. Gib dieses Volumen an.

Raumgeometrie – schiefe Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

3.0 Im Drachenviereck ABCD hat die Symmetrieachse [AC] die Länge 10 cm und die Diagonale [BD] die Länge 6 cm. Die Diagonalen schneiden sich im Punkt M mit $\overline{AM} = 3\,\text{cm}$. Das Drachenviereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, bei der die Spitze S senkrecht über M mit $\overline{MS} = 6\,\text{cm}$ liegt.

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Dabei soll [AC] auf der Schrägbild-achse liegen.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$

3.2 Aus der Pyramide ABCDS entstehen neue Pyramiden ABC_nDS_n dadurch, dass [AC]
von C aus um x cm verkürzt und zugleich die Höhe [MS] über S hinaus um x cm verlängert wird. Dabei gilt $0 < x < 7;\ x \in \mathbb{R}$
Zeichne die Pyramide ABC_1DS_1 für $x = 2\,\text{cm}$ in das Schrägbild ein.

3.3 Stelle das Volumen V(x) der Pyramiden ABC_nDS_n in Abhängigkeit von x dar.

3.4 Unter allen Pyramiden ABC_nDS_n hat die Pyramide ABC_oDS_o das größte Volumen V_{max}. Berechne V_{max} und das Maß γ des Winkels BS_oD.

3.5 In der Pyramide ABC_2DS_2 schließt die Seitenkante $[C_2S_2]$ mit der Grundfläche den Winkel S_2C_2M mit dem Maß 78° ein.
Berechne die Länge der Strecke $[MC_2]$.

4.0 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis [AB] und der Höhe $h_\Delta = [MC]$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über M liegt (M ist Mittelpunkt von [AB]). $\overline{AB} = 14\,\text{cm}$; $\overline{MC} = 10\,\text{cm}$; $\overline{MS} = h_P = 12\,\text{cm}$

4.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide.
$q = 0{,}5;\ \omega = 45°$; [MC] liegt auf der Schrägbildachse.

4.2 Berechne das Maß des Winkels $MCS = \varphi$ sowie die Länge der Seitenkante [CS].

4.3 Berechne Volumen und Oberfläche der Pyramide ABCS.

4.4 Verlängert man [MC] über C hinaus um x cm und verkürzt die Höhe [MS] von S aus um x cm, so entstehen neue Pyramiden ABC_nS_n; dabei gilt $0 < x < 12;\ x \in \mathbb{R}$.
Zeichne die Pyramide ABC_1S_1 für $x = 3\,\text{cm}$ in das Schrägbild ein.

4.5 Gib eine Gleichung für das Volumen V(x) der Pyramiden ABC_nS_n in Abhängigkeit von x an.

4.6 Bestimme den x-Wert für den die zugehörige Pyramide ABC_nS_n das größte Volumen V_{max} besitzt und gib V_{max} an.
Berechne für diese Belegung von x das Maß des Winkels $MC_2S_2 = \varphi_2$.

4.7 Ermittle den x-Wert für den das Volumen der zugehörigen Pyramide ABC_3S_3 gleich der Hälfte des Volumens der Pyramide ABCS ist.

Raumgeometrie – schiefe Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

5.0 Das Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 10\,\text{cm}$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über D liegt und $\overline{DS} = 12\,\text{cm}$ ist.

5.1 Erstelle ein Schrägbild der Pyramide ABCDS im Maßstab 1:2 (oder wahlweise 1:1) $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$**;** [CD] liegt auf der Schrägbildachse.

5.2 Berechne die Länge der Pyramidenkante [BS] sowie das Maß des Winkels $DBS = \varphi$.

5.3 Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS.

5.4 Man erhält neue Pyramiden $A_nBC_nDS_n$, wenn man sowohl [CD] über C hinaus als auch [AB] über A hinaus um jeweils x cm verlängert und [DS] von S aus um 0,5 x cm verkürzt; dabei gilt $0 < x < 24;\ x \in \mathbb{R}$.
Zeichne für $x = 3\,\text{cm}$ die zugehörige Pyramide $A_1BC_1DS_1$ in das Schrägbild ein.

5.5 Stelle das Volumen V(x) der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x dar.

5.6 Für welche Belegung von x hat die zugehörige Pyramide $A_0BC_0DS_0$ das größte Volumen? Gib dieses größte Volumen V_{max} an.

5.7 Für welchen Wert von x hat die Pyramide $A_2BC_2DS_2$ das gleiche Volumen wie die Pyramide ABCDS?

6.0 Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Basis [BC] des gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{AM} = 8\,\text{cm}$. Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über M mit $\overline{MS} = 10\,\text{cm}$ liegt.

6.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS. [AM] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichnung: $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$
Berechne das Maß φ des Winkels MAS.

6.2 Punkte P_n auf der Seitenkante [AS] der Pyramide sind Eckpunkte von Dreiecken BCP_n.
Zeichne das Dreieck BCP_1 für $\overline{AP_1} = 4\,\text{cm}$ in das Schrägbild unter 6.1 ein.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCP_1.

6.3 Es gibt ein Dreieck BCP_2, so dass $\sphericalangle P_2MA = 65°$ gilt.
Berechne das Maß ε des Winkels BP_2C.

6.4 **D**ie Basis [BC] des Dreiecks ABC wird über B und C hinaus jeweils um x cm verlängert, gleichzeitig wird die Pyramidenhöhe [MS] von S aus um 0,5 x cm verkürzt. Es entstehen neue Pyramiden $AB_nC_nS_n$.
Zeichne die Pyramide $AB_1C_1S_1$ für $x = 3\,\text{cm}$ in das Schrägbild zu 6.1 oder in ein neues Schrägbild ein.
Zeige durch Rechnung, dass für das Volumen V(x) der Pyramiden $AB_nC_nS_n$ in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = -\frac{4}{3}\left(x^2 - 15x - 100\right)\text{cm}^3$.

6.5 Berechne das Volumen V_2 der Pyramide $AB_2C_2S_2$, bei der der Winkel $B_2S_2C_2$ das Maß 120° besitzt.

Ergebnisse auf 2 Stellen nach dem Komma runden!