Raumgeometrie - gerade Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 9 cm ist die Grundfläche einer 10 cm hohen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M.
Verlängert man die Seiten [AB] und [DC] über die Endpunkte hinaus um jeweils x cm und verkürzt gleichzeitig die Höhe um x cm ($0 < x < 10$), so enstehen neue vierseitige Pyramiden A'B'C'D'S' mit dem Rechteck A'B'C'D' als Grundfläche.

1.1 Zeichne ein Schrägbild der ursprünglichen Pyramide (CD = Schrägbildachse; $\omega = 45°$; $q = 0{,}5$) und zeichne eine Pyramide A'B'C'D'S' farbig ein.

1.2 Berechne das Volumen V(x) der Pyramiden A'B'C'D'S' in Abhängigkeit von x.
(Ergebnis: $V_{(x)} = -6x^2 + 33x + 270$)

1.3 Für welche Belegung von x erhält man die Pyramide mit dem größten Volumen ?

1.4 Für welche Belegung von x besitzt die Seitenfläche B'C'S' der Pyramide einen extremen Flächeninhalt ?
(Teilergebnis: $A_{(x)} = 4{,}5\sqrt{2x^2 - 11x + 120{,}25}$)

1.5 Für welchen Bereich von x ist der Flächeninhalt der Seitenfläche B'C'S' größer als $54\ cm^2$?

2.0 Gegeben ist eine gleichseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche ABCD, sowie $\overline{AB} = 8\,cm$ und h = 9 cm.

2.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$ und der Rißachse CD.

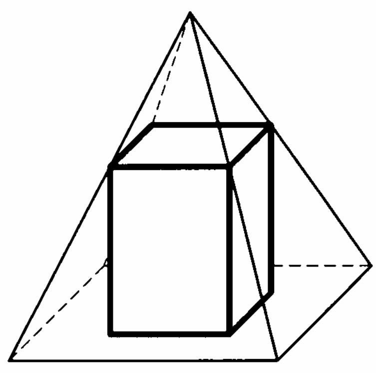
2.2 Berechne den Neigungswinkel φ der Seiten**kante** AS gegen die Grundfläche.

2.3 Berechne den Neigungswinkel ε der Seiten**fläche** BCS gegen die Grundfläche.

2.4 Berechne die Länge der Kante [AS].

2.5 Der Pyramide wird nun ein Quader mit der Höhe H = 5 cm wie in der Skizze gezeigt einbeschrieben.
Berechne das Volumen des Quaders.

Hinweis: Zeichne hierzu ein Schnittbild der beiden Körper ähnlich einem Axialschnitt und berechne zunächst die Länge einer Kante der ebenfalls quadratischen Grundfläche des Quaders.



2.6 Verkürzt man die Höhe der Pyramide um x cm und verlängert man die Kanten [AB] und [CD] über A und B bzw. über C und D hinaus um jeweils x cm, entstehen neue Pyramiden A´B´C´D´S´.
Ergänze die Zeichnung zu 2.1 entsprechend für x = 2 cm.

2.7 Berechne das Volumen V(x) der neuen Pyramiden in Abhängigkeit von x.

3.0 Gegeben ist eine 12 cm hohe gerade quadratische Pyramide ABCDS.
Die Grundfläche hat die Kantenlänge 6 cm. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M.
Verlängert man die Diagonale [AC] auf beiden Seiten um $x\sqrt{2}$ cm und verkürzt gleichzeitig die Höhe [MS] um x cm, so erhält man neue Pyramiden A'BC'DS' mit Rauten als Grundfläche.

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS und der Pyramide A'BC'DS' für x = 3 cm; $\omega = 45°$, q = 0,5; AC sei Schrägbildachse.

3.2 Berechne das Volumen $V_{(x)}$ der Pyramiden A'BC'DS' in Abhängigkeit von x.

[Ergebnis: $V_{(x)} = (-\,4x^2 + 36x + 144)\ \text{cm}^3$]

3.3 Bestimme den Extremwert, den das Volumen annehmen kann und den zugehörigen x-Wert.

3.4 Für welche Werte von x beträgt das Pyramidenvolumen 200 cm^3 ?

3.5 Berechne die Länge der Seitenkante $\overline{A'S'}$ in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $\overline{A'S'}_{(x)} = \sqrt{3x^2 - 12x + 162}$ cm

3.6 Zeige rechnerisch, daß es kein x gibt, so daß die Seitenlänge $\overline{A'S'}$ den Wert 10 cm annimmt.

4.0 Das Quadrat ABCD mit der Diagonalenlänge 12 cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats ABCD mit $\overline{MS}$ = 12 cm.

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. [AC] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichnung: q = 0,5; $\omega = 45°$

4.2 Berechne das Maß α des Winkels CAS sowie die Kantenlänge $\overline{AS}$.

4.3 Wenn man die Diagonale [AC] der Grundfläche ABCD von A und von C aus um jeweils x cm verkürzt, so entstehen neue Pyramiden A_nBC_nDS.
Zeichne die Pyramide A_1BC_1DS für x = 2 in das Schrägbild ein.

Berechne das Maß ε des Winkels A_1SB und die Oberfläche O der Pyramide A_1BC_1DS.

4.4 Der Punkt T_1 liegt auf der Seitenkante $[A_1S]$ mit $\overline{AA}_1$ = 2; es gilt: $\overline{A_1T_1}$ = 4,5 cm.
Berechne Die Streckenlänge $\overline{T_1C_1}$.

4.5 In der Pyramide A_2BC_2DS hat der Winkel $A_2SC_2 = \varphi$ das Maß 38°.
Berechne den zugehörigen Wert für x.

5.0 Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 6 cm. Je zwei gegenüberliegende Seitenkanten schließen einen Winkel vom Maß φ ein.

5.1 Bestimme das Volumen V in Abhängigkeit von φ.

$$\left(\text{Ergebnis}: V(\varphi) = \frac{36\sqrt{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}}\text{cm}^3 \qquad \text{oder} \qquad V(\varphi) = \frac{36\sqrt{2}\left(1+\cos\varphi\right)}{\sin\varphi}\text{cm}^3\right)$$

5.2 Tabellarisiere V(φ) mit $\Delta\varphi = 30°$ in einem sinnvoll gewählten Intervall von φ und zeichne den Graphen.

5.3 Bestimme den Inhalt O der Oberfläche in Abhängigkeit von φ.

$$\left(\text{Ergebnis}: \quad O(\varphi) = 36\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{\tan^2\frac{\varphi}{2}}}\right)\text{cm}^2 \qquad \text{oder} \qquad O(\varphi) = 36\cdot\left(1+\sqrt{\frac{4}{1-\cos\varphi}-1}\right)\text{cm}^2\right)$$

5.4 Zeichne den Graphen von O(φ) (Bedingungen wie in Aufgabe 5.2).

6.0 Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a = 4 cm. Die Seitenflächen haben das Basiswinkelmaß ε.

6.1 Stelle den Oberflächeninhalt O in Abhängigkeit von ε dar.

6.2 Tabellarisiere O(ε) in einem sinnvoll gewählten Intervall mit $\Delta\varepsilon = 10°$ und zeichne den Graphen von O(ε).

6.3 Berechne das Volumen in Abhängigkeit von ε.

7.0 Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit der Seitenkantenlänge s = 12 cm. Eine Seitenkante schließt mit der Grundfläche einen Winkel mit dem Maß α ein.

7.1 Berechne die Höhe h und die Grundkantenlänge a der Pyramide in Abhängigkeit von α.

7.2 Berechne das Volumen V der Pyramide in Abhängigkeit von α.

(Ergebnis: $V(\alpha) = 1152(\sin\alpha - \sin^3\alpha)\text{cm}^3$)

7.3 Tabellarisiere V(α) in]0°; 90°[mit $\Delta\alpha = 10°$.

7.4 Bestimme graphisch den Extremwert des Volumens. Gib das zugehörige α_0 an.