Raumgeometrie - gerade Pyramide

1.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 7 cm ist Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe h = 8 cm. S ist die Pyramidenspitze.

1.1 Fertige ein Schrägbild der Pyramide ABCDS an.

1.2 Berechne die Länge der Kante [CS].

1.3 Bestimme das Volumen V der Pyramide.

1.4 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.

2.0 Die gerade Pyramide ABCDS mit der quadratischen Grundfläche ABCD und der Höhe h = 8 cm besitzt die Kante [CS] mit der Länge $\overline{CS} = 10$ cm. S ist die Pyramidenspitze.

2.1 Fertige ein Schrägbild der Pyramide ABCDS an.
Für die Zeichnung: [AB] = 8,5 cm soll auf der Rißachse liegen.

2.2 Berechne die Länge der Strecke [AC].

2.3 Berechne das Volumen V der Pyramide ABCDS.

2.4 Berechne die Oberfläche der Pyramide ABCDS.

3.0 Die Raute ABCD mit $\overline{AC} = 12$ cm und $\overline{BD} = 8$ cm ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS} = 10$ cm. Dabei ist M der Schnittpunkt der Diagonalen [AC] und [BD]. S ist die Pyramidenspitze.

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit q = 0,5 und $\omega = 45°$, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.

3.2 Berechne das Maß φ des Winkels MSC, den die Seitenkante [CS] mit der Höhe einschließt, sowie die Länge von [CS] jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

3.3 Berechne das Maß γ des Winkels BSC auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

4.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 7cm ist Grundfläche einer 9cm hohen geraden Pyramide.

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit q = 0,5 und $\omega = 45°$. Die Seite [CD] liegt auf der Rißachse s.

4.2 Berechne das Maß α des Neigungswinkels einer Seitenkante gegen die Grundfläche.

4.3 Berechne das Maß β des Neigungswinkels einer Seitenfläche gegen die Grundfläche.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

5.0 Gegeben ist eine gerade Pyramide ABCDS mit der Höhe h = 10 cm und der quadratischen Grundfläche ABCD. Das Pyramidenvolumen beträgt 160 cm^3. Der Pyramide wird ein Quader mit der quadratischen Grundfläche EFGH so einbeschrieben, dass die Seitenkanten der Quadergrundfläche parallel sind mit den Seitenkanten der Pyramidengrundfläche. Die Höhe h_Q des Quaders beträgt 40% der Pyramidenhöhe h.

5.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide mit dem einbeschriebenen Quader mit q = 0,5; ω = 45°. Die Seite [CD] soll auf der Rißachse liegen.

5.2 Berechne das Volumen des Quaders.

6.0 Das Quadrat ABCD (Seitenlänge a) ist Grundfläche einer Pyramide mit der Höhe h = 2a, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates ABCD liegt.

6.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide für a = 5 cm; ω = 45°; q = 0,5; [AB] liegt auf der Schrägbildachse.

6.2 Bestimme die Länge $s(a)$ der Seitenkante sowie den Flächeninhalt $A(a)$ einer Seitenfläche in Abhängigkeit von a.

[Ergebnis: $s(a) = 1{,}5\sqrt{2}\,a$ LE $\quad A(a) = \frac{\sqrt{17}}{4}a^2$ FE]

6.3 Weise nach, dass das Maß des Neigungswinkels α der Seitenfläche gegen die Grundfläche unabhängig von der Belegung von a ist. Gib das Maß des Neigungswinkels α an.

6.4 Bestimme die Belegung von a, so dass sich für die Oberfläche der Pyramide der Flächeninhalt A = $36\left(\sqrt{17}-1\right)cm^2$ ergibt.

6.5 Bestimme das Volumen der Pyramide für a = 6 cm. Für welche Belegung von a beträgt das Volumen der Pyramide 486 cm^3 ?

7.0 Das Rechteck ABCD mit $\overline{AB}$ = 10 cm und $\overline{BC}$ = 8 cm ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Rechtecks ABCD liegt. Die Höhe h = MS ist 12 cm lang.

7.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Für die Zeichnung: ω = 30°; q = 0,5; [AB] liegt auf der Schrägbildachse.

7.2 Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.

7.3 Die Pyramide ABCDS wird durch einen ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche in einen Pyramidenstumpf und eine Pyramide zerlegt. In welcher Höhe muss der Schnitt erfolgen, damit die beiden Teilkörper gleiches Volumen haben ?

Raumgeometrie - gerade Pyramide

8.0 Die Grundfläche der Pyramide ABCDS ist das Rechteck ABCD mit den Längen $\overline{AB} = 7\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\text{cm}$. M ist der Mittelpunkt von [BC] , N ist der Mittelpunkt von [AD], O ist der Diagonalenschnittpunkt. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt O. Es gilt : $\overline{OS} = 10\text{ cm}$.

8.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [MN] auf der Schrägbildachse liegt; q = 0,5; $\omega = 45°$.

8.2 Berechne die Oberfläche der Pyramide ABCDS !

8.3 Berechne das Maß α des Neigungswinkels der Seitenfläche BCS zur Grundfläche ABCD, sowie das Maß β des Winkels CBS !

(Ergebnis: $\alpha = 70{,}71°$)

8.4 Auf [MS] liegen die Punkte P_n. Zeichne das Dreieck AP_1D für $\overline{MP_1} = 2\text{ cm}$ ein, und berechne das Maß γ_1 des Winkels MNP_1, sowie das Maß δ des Winkels DP_1A !

(Ergebnisse: $\overline{NP_1} = 6{,}61\text{cm}$; $\gamma_1 = 16{,}58°$)

8.5 Der Winkel MNP_2 hat das Maß $\gamma_2 = 60°$. Trage P_2 ein und berechne die Länge $\overline{MP_2}$.

9.0 Das gleichseitige Dreieck ABC mit $\overline{AB}$ = a = 6 cm ist Grundfläche einer geraden Pyramide ABCS mit $\overline{AS}$ = s = 9 cm. M ist der Mittelpunkt von [AC].
F ist Fußpunkt der Pyramidenhöhe h (und gleichzeitig auch Schnittpunkt der Höhenlinien im Dreieck ABC).

9.1 Zeichne ein Schrägbild mit MB als Schrägbildachse, $\omega = 45°$ und q = 0,75.
Für die Zeichnung: h = 8,3 cm

9.2 ε sei der Winkel zwischen [BS] und der Grundfläche, φ der Winkel zwischen [BS] und [AB] und μ der Winkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche.
Berechne die Maße der drei Winkel.

9.3 Von A und C aus werden Lote auf [BS] gefällt. Sie schneiden [BS] in P.
Berechne $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$.

9.4 τ sei der Winkel zwischen den Seitenflächen ABS und CBS.
Berechne das Maß von τ.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

10.0 Bei einer Pyramide ABCDS mit dem Quadrat ABCD als Grundfläche liegt die Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates. Die Höhe der Pyramide beträgt $\sqrt{46}$ cm, die Seitenkanten sind 8cm lang.

10.1 Berechne die Länge der Grundkante und das Volumen der Pyramide.
(Teilergebnis: $\overline{AB} = 6\text{cm}$)

10.2 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$.

10.3 Berechne das Maß β des Neigungswinkels SBD der Seitenkante [BS] gegenüber der Grundfläche.
(Ergebnis: $\beta = 57{,}97°$)

10.4 Berechne die Maße der Innenwinkel des Seitendreiecks BCS der Pyramide.
(Teilergebnis: $\sphericalangle CBS = 67{,}98°$)

10.5 Berechne die Mantelfläche der Pyramide ABCDS.

10.6 Auf der Seitenkante [BS] liegen die Punkte P_n von Dreiecken ACP_n.
Zeichne ein derartiges Dreieck in das Schrägbild ein.
Unter den Dreiecken gibt es ein Dreieck ACP_0 mit minimalem Flächeninhalt.
Berechne diesen Flächeninhalt.
Berechne ferner die Länge der Strecke $[BP_1]$, wobei der Flächeninhalt des Dreiecks MBP_1 10 cm^2 beträgt.

11.0 Eine Pyramide ABCDS hat eine quadratische Grundfläche (Seitenlänge 6 cm) und die Höhe $h = 3\sqrt{6}$ cm. Auf der Kante [CS] wandert ein Punkt X.

11.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$.
[AB] soll auf der Schrägbildachse liegen.
Kennzeichne den Diagonalenschnittpunkt mit M und zeichne eine beliebige Strecke [MX] ein.

11.2 Berechne den Neigungswinkel φ einer Seitenkante gegen die Grundfläche.

11.3 Der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und der Strecke [MX] wird mit α bezeichnet. Zeige das gilt: $\overline{MX} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2 \cdot \sin\left(60° + \alpha\right)}$

11.4 Für welches α erhält man die kleinste Streckenlänge [MX] ?

11.5 Zeige daß gilt: $\overline{CX} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot \tan\alpha}{\sqrt{3} + \tan\alpha}$

Begründe geometrisch, daß $\overline{CX}$ für $\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$ nicht definiert ist.

11.6 Für welches α beträgt die Fläche des Dreiecks DBX $9\sqrt{6}\text{ cm}^2$?

Raumgeometrie - gerade Pyramide

12.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS. Ihre Seitenkanten sind ebenfalls a cm lang.
Eine Ebene BDP mit $P \in [AS]$ schneidet aus der Pyramide gleichschenklige Dreiecke BDP aus. Die Länge der Strecke $\overline{AP}$ beträgt z cm.

12.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit einem gleichschenkligen Dreieck BDP.
Für die Zeichnung: a = 9; q = 0,5; ω = 30°; Schrägbildachse CD.

12.2 Berechne die Länge der Dreiecksseite $\overline{BP}$ = y cm in Abhängigkeit von a und z !

12.3 Der Winkel an der Spitze der gleichschenkligen Dreiecke BDP hat das Maß ε.
Berechne cos ε in Abhängigkeit von a und z !

12.4 Bestimme mit Hilfe des Terms cos ε aus Teilaufgabe 12.3 die Winkelmaße ε für a = 9 und $z \in [0; 9]$ mit $\Delta z = 1{,}5$!

13.0 Die Raute ABCD mit $\overline{AC}$ = 14 cm und $\overline{BD}$ = 8 cm ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$ = 8 cm. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen [AC] und [BD] der Raute ABCD.

13.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS. Die Rautendiagonale [BD] soll auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: q = 0,5; ω = 45°

13.2 Berechne das Maß ε des Winkels, den die Seitenkante [BS] mit der Grundfläche einschließt.
[Ergebnis: ε = 63,43°]

13.3 Die Punkte Q_n auf der Pyramidenkante [BS] sind Eckpunkte von Dreiecken DMQ_n.
Zeichne das Dreieck DMQ_1, das man für $\overline{BQ_1}$ = 7 cm erhält, in die Zeichnung ein.
Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks DMQ_1 sowie die Längen der Dreiecksseiten $[DQ_1]$ und $[MQ_1]$.

13.4 Der Winkel MDQ_2 hat das Maß φ_2 = 35°.
Zeichne das Dreieck DMQ_2 in die Zeichnung ein.
Berechne die Länge der Strecke $[BQ_2]$.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

14.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalenlängen $\overline{AC} = 10$ cm und $\overline{BD} = 8$ cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M mit $\overline{MS} = 10$ cm liegt.

14.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. [AC] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$

14.2 Berechne das Maß γ des Winkels ASC sowie die Länge der Kante [AS].
[Ergebnis: $\gamma = 53{,}13°$; $\overline{AS} = 11{,}18$ cm]

14.3 Der Punkt E auf [AS] mit $\overline{AE} = 6{,}5$ cm, der Punkt C, der Punkt F auf [BS] und der Punkt G auf [DS] sind die Eckpunkte des Vierecks EFCG, wobei [FG] parallel zu [BD] verläuft. Die Diagonalen [EC] und [FG] des Vierecks EFCG schneiden sich im Punkt T auf [MS].
Zeichne das Viereck EFCG mit seinen Diagonalen in das Schrägbild ein.

14.4 Berechne das Maß φ des Winkels CES und die Länge der Strecke [ST].

14.5 Berechne die Streckenlänge [FG] und das Volumen der Pyramide EFCGS.

15.0 Bei einer geraden Pyramide ABCDS mit $\overline{AB} = 3b$ cm und $\overline{BC} = 2b$ cm beträgt die Länge einer Seitenkante 4b cm.

15.1 Zeichne ein Schrägbild mit $q = 0{,}5$ und $\omega = 45°$ für $b = 2$. Rißachse : [AB].
(Für die Zeichnung: Pyramidenhöhe $h = 7$ cm)

15.2 Für die Punkte Z_n gilt: $Z_n \in [AB]$ oder $Z_n \in [BC]$.
Gib die Länge der Strecken $[DZ_n]$ in Abhängigkeit von b und β an,
wenn $\sphericalangle ADZ_n = \beta$.

15.3 Berechne die Fläche der Dreiecke DSZ_n in Abhängigkeit von b und β .

15.4 Berechne den Winkel β^*, für den die Fläche des Dreiecks DSZ_n maximal wird. Begründe das Ergebnis.

15.5 Berechne den Winkel, den die gegenüberliegenden Seitenflächen jeweils miteinander einschließen.

