Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader)

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Ein gerades Prisma ist 40 cm hoch und hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche. Die Katheten des Dreiecks sind 15 cm und 9 cm lang. Man erhält neue Prismen, wenn man die 9 cm Kathete um x cm verlängert und gleichzeitig die 15 cm Kathete um x cm verkürzt. In jedem Fall bleibt die Höhe gleich.

1.1 Wie ist der Definitionsbereich; d.h. welche Werte für x können sinnvoll eingesetzt werden?

1.2 Gib eine Gleichung für das Volumen $V_{(x)}$ der Prismen in Abhängigkeit von x an.

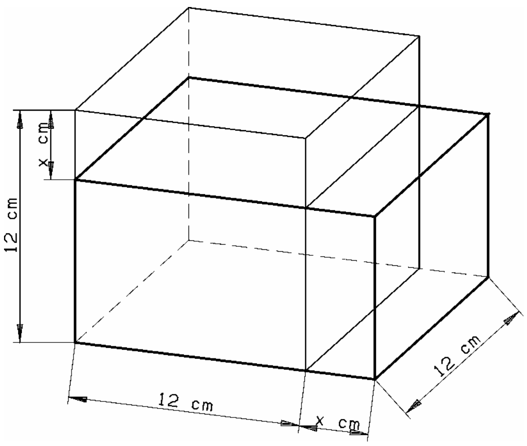
(Ergebnis: $V_{(x)} = (-20x^2 + 12x + 2700)\ cm^3$

1.3 Welcher Wert für x erzeugt das Prisma mit dem größten Volumen (Extremwert) ?

1.4 Bestimme die Mantelfläche $M_{(x)}$ des Prismas in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $M_{(x)} = (960 + 40\sqrt{2x^2 - 12x + 306}\ )\ cm^2$

2.0 Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 12cm. Es entstehen Quader, wenn man eine Kante um x cm verkürzt und gleichzeitig eine andere Kante um x cm verlängert.



2.1 Stelle das Volumen der entstehenden Quader in Abhängigkeit von x dar.

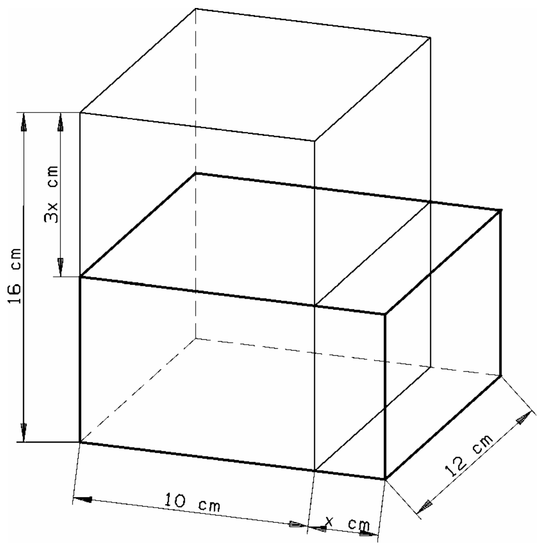
(Ergebnis: $V_{(x)} = (-12x^2 + 1728)\ cm^3$)

2.2 Stelle die Oberfläche der Quader in Abhängigkeit von x dar.

(Ergebnis: $O_{(x)} = (-2x^2 + 864)\ cm^2$)

2.3 Man kann sofort das größte Volumen und die größte Oberfläche der entstehenden Quader bestimmen. Wie groß ist in beiden Fällen der x-Wert ?

3.0 Ein Quader mit den Grundkanten 10 cm und 12 cm hat eine Höhe von 16 cm. Es entstehen neue Quader wenn man die Höhe um 3x cm verkürzt und gleichzeitig die 10 cm lange Grundkante um x cm verlängert.



3.1 Stelle das Volumen der neuen Quader in Abhängigkeit von x dar.

[Ergebnis: $V_{(x)} = (-36x^2 - 168x + 1920)\ cm^3$]

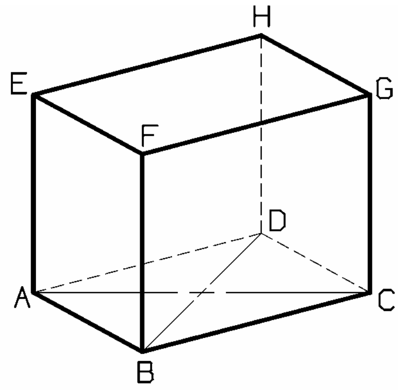
3.2 Wie lautet der x-Wert für das größte Volumen ? Vergleiche den gefundenen Wert mit dem Definitionsbereich.

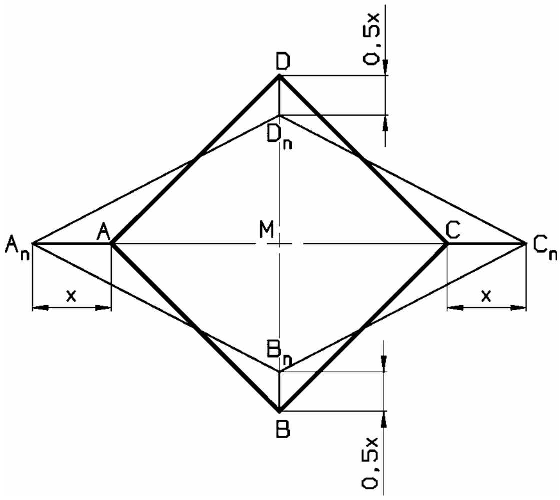
3.3 Hat der Quader mit dem größten Volumen auch gleichzeitig die größte Oberfläche ?

(Teilergebnis: $O_{(x)} = (-6x^2 - 76x + 944)\ cm^2$)

Vergleiche den gefundenen Wert mit dem Definitionsbereich.

4.0 Die Grundfläche eines geraden Prismas (Quader) ABCDEFGH ist ein Quadrat mit der Diagonalenlänge $6\sqrt{2}$ cm. Die Höhe beträgt 8 cm. Verlängert man die Diagonale [AC] von A und C aus um jeweils x cm und verkürzt man gleichzeitig die Diagonale [BD] von B und D aus um jeweils 0,5x cm, so erhält man neue Prismen mit den Grundflächen $A_nB_nC_nD_n$. Die Prismenhöhe bleibt stets unverändert.





4.1 Gib eine Gleichung für das Volumen $V_{(x)}$ der Prismen in Abhängigkeit von x an.
Welches geometrisch sinnvolle Intervall kann der Wert für x annehmen ?
[Ergebnis: $V_{(x)} = (-8x^2 + 24\sqrt{2} \cdot x + 288)\ \text{cm}^3$]

4.2 Berechne den Wert für x, für den man ein Prisma mit dem Volumen V = 320 cm^3 erhält.

4.3 Berechne den Wert für x, für den man das maximale Prisma V_{max} erhält und gib den Wert für V_{max} an.

4.4 Gib eine Gleichung für die Oberfläche der Prismen $O_{(x)}$ in Abhängigkeit von x an.

5.0 Ein Quader ABCDEFGH hat die Seitenlängen [AB] = 12 cm, [BC] = 8 cm und die Höhe [AE] = 10 cm. Verkürzt man die Grundkanten [AB] und [DC] jeweils von A bzw. D aus um x cm und verlängert gleichzeitig die Grundkanten [AD] bzw. [BC] über D und C hinaus um 2 x cm, so erhält man neue Quader $A_nBC_nD_nE_nFG_nH_n$.
Die Höhe der Quader ist stets unverändert.

5.1 Gib die Oberfläche $O_{(x)}$ der Quader in Abhängigkeit von x an.
In welchem Intervall kann sich x bewegen ?
[Ergebnis: $O_{(x)} = 4(-x^2 + 12x + 148)\ \text{cm}^2$]

5.2 Für welchen x-Wert erhält man Quader mit einem Oberflächeninhalt von 700 cm^2.

5.3 Berechne das Volumen $V_{(x)}$ der Quader in Abhängigkeit von x.

5.4 Bestimme die x-Werte für die man Quader mit V = 1 000 cm^3 erhält.

5.5 Ermittle das größte Volumen und den zugehörigen x-Wert.

5.6 Gib eine Gleichung für die Raumdiagonale $[BH_n]$ in Abhängigkeit von x an.

5.7 Durch die Raumdiagonale $[BH_n]$, die Grundflächendiagonale $[BD_n]$ und die Seitenkante $[D_nH_n]$ werden Dreiecke BH_nD_n festgelegt.
Stelle die Flächeninhalte $A_{(x)}$ der Dreiecke BH_nD_n in Abhängigkeit von x dar.

6.0 Gegeben ist das Prisma ABCDEFGH mit der Höhe h = 6 cm und der Raute ABCD als Grundfläche mit $\overline{AC}$ = 10 cm und $\overline{BD}$ = 18 cm.

6.1 Zeichne das Schrägbild des Prismas so, dass die Diagonale [BD] auf der Schrägbildachse liegt (Blatt quer nehmen).
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$

6.2 Berechne die Oberfläche des Prismas ABCDEFGH auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

6.3 Es entstehen neue Prismen, in dem man die Diagonale [BD] von B und D aus um jeweils x cm verkürzt und die Höhe des Prismas um x cm verlängert.
Zeichne das Prisma für x = 3 in das Schrägbild zu 7.1 ein.

6.4 Gib die maximale Grundmenge für x an.

6.5 Berechne das Volumen der neuen Prismen in Abhängigkeit von x.
[Teilergebnis: $V_{(x)} = (-10x^2 + 30x + 540)\ cm^3$]

6.6 Für welche Werte von x erhält man Prismen, deren Volumen größer als 500 cm^3 ist ?
(Rechnerische Lösung erforderlich !)

