Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 1

Autor: Dr. Georg Elsting

1. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als einfache Nullstelle und $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$ als einfache Polstellen.
Skizzieren Sie den Graphen.

2. Nennen Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = -3$ als einfache Nullstelle, $x = -2$ als doppelte Polstelle und mit der x-Achse als eine Asymptote. Skizzieren Sie den Graphen.

3. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 0{,}1 \cdot \left(x^3 - e^{x^3}\right)$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{e} - e^x}$

4. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist.

5. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[3]{2}$ als Nullstelle der Funktion $x^3 - 2$.

6. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{\frac{\cos 2x - 3\cos x + 2}{2}} - 1{,}5$ auf globale Extrema im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7. Geben Sie ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x = 1$, $x = 3$ lokale Minima und an den Stellen $x = 2$, $x = 4$ lokale Maxima hat.

8. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + ax$ auf Terrassenpunkte.

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 2

9. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als Nullstelle, mit $x = -0{,}5$ als Polstelle ohne Vorzeichenwechsel und mit $x = 0{,}5$, $x = 1$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Skizzieren Sie den Graphen.

10. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $y = -2x + 1$ als eine schräge Asymptote und mit der y-Achse und den Geraden $x = -1$, $x = 1$ als senkrechte Asymptoten. Skizzieren Sie den Graphen.

11. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 0{,}5x^3 + \cos x^3$

b) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$

12. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = |\sin x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

13. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[4]{3}$ als Nullstelle der Funktion $x^4 - 3$.

14. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^6 - x^3 + 1}{-x^6 + x^3 + 1}$ auf globale Extrema im Intervall $[0;1]$.

15. Finden Sie Stammfunktionen für den Sinus hyperbolikus $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und für den Cosinus hyperbolikus $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

16. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = 0{,}2x^5 - x + a$ für keine reelle a fünf Nullstellen hat.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 3

17. Geben Sie ein Beispiel von einer Funktion die $x = 0$ als Nullstelle, $x = \pm 0{,}5$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel und keine weiteren Null- und Polstellen hat und dabei <u>keine gebrochen-rationale</u> Funktion ist. Skizzieren Sie den Graphen.

18. Geben Sie ein Beispiel von einer im Intervall $[1; \infty[$ definierten Funktion, deren Term eine tan(x) Funktion enthält, und deren Graph die Gerade $y = x$ als eine schräge Asymptote hat. Skizzieren Sie den Graphen.

19. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 32x^3 - \ln\left(1 + 64x^3\right), \; x > -0{,}25$

b) $f(x) = \dfrac{1 + x^3}{\sqrt{1 + x^6}}$

20. Gegeben ist, dass die überall differenzierbare Funktion $y = f(x)$ auf der ganzen Zahlengeraden gerade ist, d. h., dass $f(-x) = f(x)$ für ein beliebiges x.
Beweisen Sie, dass die für die Ableitung $f'(x)$ gilt $f'(-x) = -f'(x)$ für ein beliebiges x.
(D. h., dass die Ableitung $y = f'(x)$ eine ungerade Funktion ist.)

21. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} - 0{,}3x = 0$ eine einzige Nullstelle hat und berechnen Sie diese mit dem Newton-Verfahren und mit dem Startwert $x = 0$.

22. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right) + 3x$ auf globale Extrema im Intervall $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

23. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

24. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = e^{-\sqrt{2}\cdot\sin x} + \sqrt{2}\cdot\sin x - 1$ gilt:
$f'(x) = -\sqrt{2}\cdot\cos x\cdot f(x) + \sin 2x$.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 4

25. a) Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x = 2k + 1$ und mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k, \quad k = 1, 2, 3, ..., n$. Skizzieren Sie den Graphen für n = 2.

b) Geben Sie ein Beispiel von einer (nicht gebrochen-rationalen) Funktion mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k, \ k \in \mathbb{N}$.

26. Für welches a und b gibt es einen Punkt P, wo die Graphen der Funktionen

$f(x) = \cos x$ und $g(x) = \dfrac{(x - a)^3}{3} + x + b$ eine gemeinsame Tangente haben ?

27. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{3} + \dfrac{1}{4(x - 1)^4}, \quad x \neq 1$

b) $f(x) = \tan x - \dfrac{4x}{3}, \quad x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

28. Bei welchem a hat die Funktion $f(x) = \cos^2 x + a \cdot x$ Extremstellen ? Deren Graph Terrassenpunkte ?

29. Beweisen Sie, dass die Gleichung $5^x - x^2 - 2 = 0$ eine einzige Nullstelle im Intervall $[0; 1]$ hat und berechnen Sie die mit dem Newton-Verfahren mit dem Startwert $x = 1$.

30. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot x = 0$ auf globale Extrema im Intervall $[0;\ 2\pi]$.

31. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass die ganzrationale Funktion $f(x) = x^{10} + x^9 - 1{,}8x^8 - 0{,}2$ genau eine positive Nullstelle hat.

32. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^4} + 2\sqrt{\dfrac{x}{5}}$ gilt: $\left(x \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x)\right)^2 = 16{,}2\,x$.