Stochastik - Kapitel 2

Aufgaben ab Seite 7

2. Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten und Laplace-Experimente

2.1 Die absolute und die relative Häufigkeit

1. Beispiel:

Ich werfe 50mal einen Würfel und möchte herausfinden, wie oft jeweils die Augenzahl 1,2,3,4,5 und 6 eintritt. Dazu mache ich mir eine Strichliste oder eine kleine Tabelle:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	7	6	10	9	8	10

Jetzt frage ich mich, wie oft ein bestimmtes Ergebnis, z.B. die „5“ aufgetreten ist ?
$\Rightarrow$ **absolute Häufigkeit** von „5“

Außerdem interessiert mich noch, wie oft dieses Ergebnis „5“ im Verhältnis zur Gesamtzahl der 50 Würfe aufgetreten ist.
$\Rightarrow$ **relative Häufigkeit** von „5“

Die kleine Tabelle von oben lässt sich nun erweitern:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	7	6	10	9	8	10
Relative Häufigkeit	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{10}{50}$

Merke:

- Die **absolute Häufigkeit** gibt an, wie oft ein *bestimmtes* Ergebnis auftritt.
- Die **relative Häufigkeit** gibt an, wie oft ein bestimmtes Ergebnis im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Durchführungen vorkommt.
- Die **relative Häufigkeit** gibt also an, wie groß der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl der Durchführungen des Zufallsexperimentes ist.

$$\boxed{\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl der Durchführungen}} = h_n(A) = \frac{k}{n}}$$

- Die relative Häufigkeit wird meistens in Prozent oder als Dezimalbruch angegeben.

Stochastik - Kapitel 2

- „$\mathbf{h_n(A)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$" bezeichnet man als die **relative Häufigkeit des Ereignisses A bei n Versuchen.**
  (*Anmerkung: für das kleine „h" wird in der Literatur häufig auch ein „r" verwendet)*
- **„k"** nennt man die **absolute Häufigkeit bei n Versuchen.**

2. Beispiel:

Eine Münze wird 20 mal geworfen. Es fällt dabei 11 mal „Zahl".
Das Ereignis A lautet nun: „Es fällt Zahl".
Die absolute Häufigkeit heißt dann: $k = z(A) = 11$

Die relative Häufigkeit berechnet sich folgendermaßen: $h_{20} = \frac{k}{n} = \frac{11}{20} = 0{,}55 = 55\%$

Stochastik - Kapitel 2

2.2 Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

Bei der Durchführung eines Zufallsexperimentes sagt man, dass ein einzelnes Ereignis eine bestimmte „Chance“ hat aufzutreten.
In der Mathematik spricht man aber nicht von Chancen, sondern von **„Wahrscheinlichkeiten“**.
Diese Wahrscheinlichkeiten gibt man als Bruch, als Dezimalzahl oder in Prozent an $\left(\frac{1}{4}; 0{,}25; 25\%\right)$.

Natürlich können wir bei der Durchführung eines Zufallsexperimentes das genaue Ergebnis nicht vorhersagen. Wir erwarten aber automatisch, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses von den Bedingungen des Experimentes abhängig ist.
Z. B. rechnen wir damit, dass ein Würfel „korrekt“ geformt ist und alle Seiten die gleiche Fläche besitzen. Werfen wir einen solchen „fairen“ Würfel beliebig oft, dann erwarten wir, dass in ungefähr $\frac{1}{6}$ aller Würfe die Augenzahl 3 fällt.

Merke:

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft ausgeführt, dann stabilisieren sich für jedes Ergebnis die relativen Häufigkeiten, d.h. sie pendeln sich um einen bestimmten Wert ein. Wir erwarten, dass dieser Wert nahe bei der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses liegt.
(Empirisches Gesetz der großen Zahlen)

Beispiel:
Beim 1300-maligen Werfen eines Lego-Steines dessen Seiten mit den Ziffern 1 bis 6 markiert wurden (unterschiedlich große Grundflächen) erhalten wir die nachfolgende Tabelle:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	151	17	585	403	15	129
Relative Häufigkeit	$\frac{151}{1300}$ $=11{,}6\%$	$\frac{17}{1300}$ $=1{,}3\%$	$\frac{585}{1300}$ $=45{,}0\%$	$\frac{403}{1300}$ $=31{,}0\%$	$\frac{15}{1300}$ $=1{,}2\%$	$\frac{129}{1300}$ $=9{,}9\%$

$\Rightarrow$ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse eines Zufallsversuches, d.h. die Summe aller relativen Häufigkeiten, ist immer 1 (=100%).

Im Beispiel: $\frac{151}{1300}+\frac{17}{1300}+\frac{585}{1300}+\frac{403}{1300}+\frac{15}{1300}+\frac{129}{1300}=\frac{1300}{1300}=1$

Stochastik - Kapitel 2

2.3 Die Pfadregeln

Im 1. Kapitel haben wir bereits gelernt, dass man zur Veranschaulichung von **mehrstufigen Zufallsexperimenten** ein Baumdiagramm zeichnet und die einzelnen Wahrscheinlichkeiten jeweils an den Ästen des Baumes notiert.

Merke:

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Pfade die zu diesem Ereignis gehören addiert.

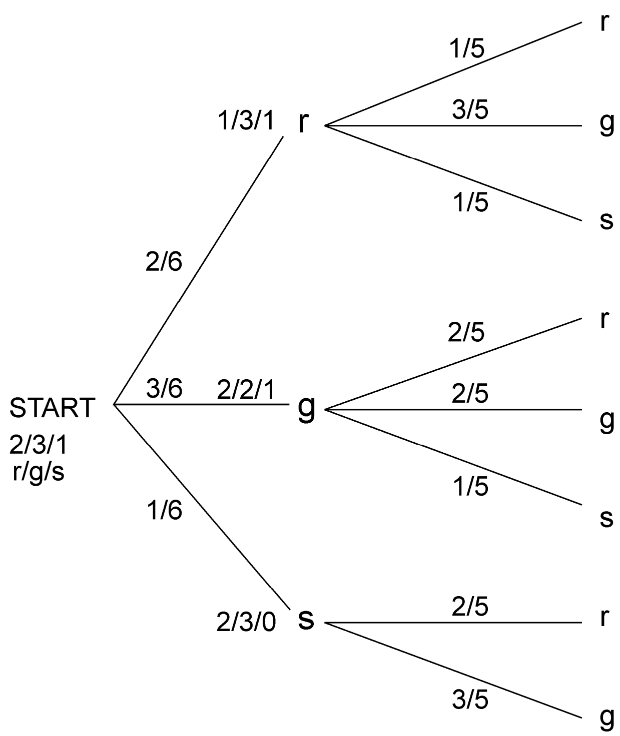
Anmerkungen zum folgenden Beispiel:

⇒ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die vom Verzweigungspunkt ausgehen, ist immer 1.
(Im Beispiel: $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=1$)

⇒ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist stets 1.
(Im Beispiel: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{6}{30}+\frac{3}{30}+\frac{2}{30}+\frac{3}{30}=1$)

Beispiel:

Eine Urne enthält 6 Kugeln: 2 **r**osafarbene, 3 **g**raue und 1 **s**chwarze.
Wir ziehen zwei Kugeln ohne Zurücklegen.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse.



$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$

$\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{30}$

$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$

$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{30}$

$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{30}$

$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{30}$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{30}$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{30}$

Stochastik - Kapitel 2

2.4 Laplace-Experimente und Laplace-Wahrscheinlichkeit

$\Rightarrow$ Wenn wir beispielsweise eine Münze werfen, sind wir uns mit unserer Wahrscheinlichkeitsangabe sehr sicher.
Die Münze landet auf der Seite „Kopf“ und auf der Seite „Zahl“ jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%.

$\Rightarrow$ Auch beim Werfen eines normalen Spielwürfels sagen wir, dass jede Augenzahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, nämlich mit $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$ fällt.

$\Rightarrow$ Bei Glücksrädern, die gleich große Felder besitzen und auch beim Ziehen von verschieden farbigen Kugeln aus einer Urne, zweifeln wir nicht daran, dass die Ergebnisse alle gleich wahrscheinlich sind.

Merke:

• Es gibt Experimente, bei denen wir annehmen können, dass alle Ergebnisse eines Zufallsversuches mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

• Bei n Ergebnisse beträgt die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses somit $\frac{1}{n}$.

In solchen Fällen spricht man von **Laplace-Wahrscheinlichkeiten.**

• Für die Wahrscheinlichkeit P(A) des Ereignisses A gilt dann:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textbf{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}}}$$

1. Beispiel:

Ein Würfel wird zweimal geworfen.
Wie wahrscheinlich ist es, dass zweimal die Augenzahl 6 erscheint ?

Das Ereignis A lautet folglich: „Zweimal wird die 6 geworfen.“
$A = \{6\ 6\}$; $|A| = 1$ (es gibt eine Möglichkeit. Die Reihenfolge kann man hier nicht unterscheiden, da es sich um die gleiche Zahl handelt.)

Der Ergebnisraum Ω, also alle Fälle die auftreten können (die möglich sind), sieht so aus:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$; $|\Omega| = 6^2 = 36$

Nach diesen Überlegungen können wir jetzt P(A) berechnen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36};$$

Stochastik - Kapitel 2

2. Beispiel:

Der Würfel wird wieder zweimal geworfen.
Wie wahrscheinlich ist es nun, dass eine 6 und eine 5 erscheinen?

Ereignis B: „Es fällt eine 6 und es fällt eine 5.“

$B = \{5\,6,\ 6\,5\}$; $|B| = 2$ (Es gibt zwei Möglichkeiten. Die 5 kann im ersten oder im zweiten Durchgang geworfen werden. Für die 6 gilt logischerweise das gleiche.)

Alle Fälle die auftreten könnten, lauten immer noch $|\Omega| = 6^2 = 36$,
Jetzt kann man wieder P(B) berechnen:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36};$$

3. Beispiel:

Wieder werfen wir den Würfel zweimal.
Wie wahrscheinlich ist es, dass die Augen<u>summe</u> 4 fällt ?

Ereignis C: „Die Augensumme soll 4 betragen.“

$\boldsymbol{C} = \{1\,3,\ 3\,1,\ 2\,2\}$; $|\boldsymbol{C}| = 3$ (Es gibt drei Möglichkeiten. Die 3 kann im ersten und darauf folgend die 1 im zweiten Durchgang geworfen werden oder umgekehrt. Die Augensumme 4 erreiche ich auch durch das zweimalige Werfen der Zahl 2. In diesem Fall ist keine Unterscheidung der Reihenfolge möglich.)
Unser Ergebnisraum ist immer noch der gleich wie in den beiden voran gehenden Beispielen.

Darum errechnen wir für P(C):

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{36};$$

4. Beispiel:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei zweimaligem Werfen des Würfels eine Differenz der Augenzahlen die 2 beträgt ?

$$D = \{5\,3,\ 3\,5,\ 6\,4,\ 4\,6,\ 3\,1,\ 1\,3,\ 4\,2,\ 2\,4\};\ |\boldsymbol{D}| = 4 \cdot 2 = 8$$

Für P(D) erhalten wir:

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{8}{36};$$

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 1

1. Ein Kartenspiel hat folgende Karten: 7 8 9 10 **B**ube **D**ame **K**önig **A**s.
Sie existieren jeweils in der Farbe rot (Herz und Karo) und auch in der Farbe schwarz (Kreuz und Pik). Insgesamt also 32 Spielkarten.

Es wird nun eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Karte

a) eine Dame oder ein König ?

b) schwarz oder eine Zahl ?

c) rot oder schwarz ?

d) rot oder Karo ?

e) keine rote Zahl ?

f) ein roter Bube ?

g) rot und schwarz ?

h) ein Bild (B D K A) oder Kreuz ?

2. Die Drehscheibe beim Roulette ist in 37 gleich große Felder unterteilt (Zahlen von 0 bis 36, Annahme: alle Zahlen treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Null auftritt, wenn das Rad nur einmal gedreht wird ?

3. Bei einer Meinungsumfrage zur Rauchgewohnheit wurden die Daten von 55 Frauen und 45 Männern erfasst.
Insgesamt sind 65 dieser befragten Personen Raucher, unter ihnen 35 Frauen.

a) Wie viele der befragten Männer rauchen nicht ?

b) Berechne den relativen Anteil der weiblichen Nichtraucher unter den beiden Geschlechtern.

4. In einer Versuchsreihe vom Umfang n besitzt das Ereignis A die absolute Häufigkeit 60.
Für das Ereignis B beträgt die absolute Häufigkeit 79.
Ausserdem ist die relative Häufigkeit des Ereignisses B um 0,095 größer, als die relative Häufigkeit des Ereignisses A.

Bestimme den Versuchsumfang n.

5. Beim Handball treffen Max mit 40% Wahrscheinlichkeit und Moritz mit 70% Wahrscheinlichkeit ins Tor. Sie werfen nacheinander.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen

a) 0 Treffer

b) einen Treffer

c) zwei Treffer erzielen ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 1

6. Daniela hat in einen Korb mit 6 gekochten (g) Eiern aus Versehen noch 4 rohe (r) Eier dazugelegt. Die Mutter nimmt zum Frühstück 3 Eier heraus.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein rohes Ei dabei ist ?
Zeichne ein Baumdiagramm zur Verdeutlichung.

7. Bestimme die relativen Häufigkeiten

a) aller durch 2 teilbaren Zahlen von 1 bis 1000.

b) der durch 2 und 7 teilbaren Zahlen von 1 bis 1000.

c) der Primzahlen von 1 bis 100.

8. Hans möchte sich ein neues Auto kaufen. In einer Fachzeitschrift hat er gelesen, dass 18% aller zugelassenen PKW aus dem Ausland stammen. Von diesen Autos liefert das Herstellerwerk ABC 19,2%.
Hans möchte nun ausrechnen, wie groß die relative Häufigkeit der PKW dieses Herstellers unter unseren Autos ist. Hilf Hans dabei !

9. In einer Schüssel liegen 20 Bonbons. 8 davon schmecken nach Erdbeere (E), 8 nach Zitrone (Z) und 4 nach Kirsche (K). Alle sind in gleiches Papier eingewickelt und man kann sie deshalb nicht unterscheiden. Der Fruchtgeschmack lässt sich nur durch das Lutschen der Bonbons feststellen.

a) Rudi isst drei Bonbons hintereinander.
1. Ereignis A: „ Jeder Geschmack ist vertreten“
Ereignis B: „ Mindestens zwei Bonbons schmecken nach Kirsche“.
Gib die beiden Ereignisse als Teilmenge von Ω an und berechne P(A) und P(B).
2. Formuliere das Ereignis $\overline{B}$ in Worten und berechne $P(\overline{B})$.

b) Anna isst fünf Bonbons. Jedes mal wenn sie ein Bonbon aus der Schüssel nimmt legt sie dafür eines mit Kirschgeschmack hinein.
Berechne die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $C = \{Z,E,K,K,E\}$.

10. Gegeben sei das Ereignis E_1: „Ein neugeborenes Kind ist ein Mädchen.“
Wodurch unterscheiden sich die relative Häufigkeit $h(E_1) = 0{,}51$ und die Wahrscheinlichkeit $P(E_1) = 0{,}51$?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 2

1. Die gegebene Menge besteht aus den ersten 50 natürlichen Zahlen. Wir wählen zufällig eine Zahl aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ausgewählte Zahl durch „6“ oder durch „9“ teilbar ist ?

2. Stell dir vor, dein Vater sei ein begeisteter Lottospieler. Er möchte ausrechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist bei dem System „6 aus 49“ 6 Richtige, 5 Richtige, 4 Richtige oder 3 Richtige zu haben. Hilf ihm dabei !

3. Gemischte Aufgabenstellungen.

a) Wie viele verschiedene Ausgänge sind beim Würfeln mit 4 Würfeln möglich?

b) Wie viele verschiedene Tipps sind beim Fußballtoto möglich, wenn man die tatsächlichen Gewinnchancen der Mannschaften nicht berücksichtigt? (Man kann bei diesem Spiel 11 Reihen mit je drei Möglichkeiten tippen, 11er Wette)

c) Auf einer großen Tagung werden insgesamt 18 Vorträge bzw. Reden gehalten. 3 davon finden jeweils parallel statt. Wie viele Möglichkeiten hat ein Tagungsteilnehmer, um sich sein persönliches Tagesprogramm zusammen zu stellen ?

4. Gegeben sind die Ziffern 3, 4, 5. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat man nun, aus diesen Zahlen 3 -Tupel zu bilden ? (Das bedeutet ganz einfach, auf wie viele verschiedene Arten man die Ziffern 3, 4 und 5 anordnen kann.)

5. Du wirfst einen Würfel viermal. Wie viele Ausgänge gibt es zu dem Ereignis E „Alle Würfel zeigen eine unterschiedliche Augenzahl an“ ?

6. Es beteiligen sich 10 Schüler an einem Schwimmwettbewerb. Wie viele Möglichkeiten gibt es den ersten, zweiten oder den dritten Platz zu belegen ?
Und wie viele Ausgänge des Wettbewerbs sind insgesamt überhaupt möglich ?

7. Du befindest dich im Wartezimmer eines Arztes. Außer dir sind noch k andere Personen anwesend. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestes eine der Personen mit dir am gleichen Tag Geburtstag hat ?

8. Eine Person ordnet 5 Gegenstände beliebig an. Ein so genannter „Hellseher“ soll nun sagen, in welcher Reihenfolge die erste Person die 5 Gegenstände angeordnet hat.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der „Hellseher“ die Reihenfolge korrekt errät ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 2

9. In einer Urne befinden sich 3 schwarze, 2 weiße und 4 grüne Kugeln. Man zieht zweimal ohne Zurücklegen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit für

a) E_2 „Es werden 2 weiße kugeln gezogen“

b) E_3 „Es werden 2 grüne Kugeln gezogen“.

10. Ein Ehepaar hat 5 Söhne und keine Tochter. Wir setzen voraus, dass die Geburt eines Sohnes und eine Tochter gleichwahrscheinlich sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dann eine derartige „Zusammensetzung“ einer Familie auf ?

11. Von den Zahlen 1,2,3,…,10 wählt Peter zufällig eine Zahl aus.
Stelle folgende mögliche Ereignisse dar:

A: es wird eine Primzahl ausgewählt.

B: die ausgewählte Zahl ist gerade.

C: die Zahl, die Peter auswählt ist durch 3 teilbar.

$A \cap B$

$A \cap B \cap C$

$A \cap \overline{C}$

$\overline{A \cup B}$

12. In einem Laplace Experiment sucht Hans aus den Zahlen 1,2,3,….1000 zufällig eine aus.
Er möchte diese Ereignisse untersuchen:

A: die gewählte Zahl ist ein Vielfaches von 3.

B: die gewählte Zahl ist ein Vielfaches von 6.

C: die Zahl ist ein Vielfaches von 7.

Hans will die folgenden Wahrscheinlichkeiten berechnen. Hilf ihm dabei !
$A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C.$

13. Aus einem Skat-Kartenspiel (gesamt 32 Karten) wählen wir eine Karte zufällig aus.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: die gewählte Karte ist ein Kreuz (8 Karten sind Kreuz);

B: bei der gewählten Karte handelt es sich um einen Buben (4 Karten sind Buben);

C: die gewählte Karte ist ein Kreuz oder ein Bube.

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 2

14. Susi hat die Geheimnummer ihres fünfstelligen Zahlenschlosses für ihr Fahrrad vergessen. Sie kann sich nur noch daran erinnern, dass alle vorkommenden Ziffern größer als 4 sind und dass genau zwei der Ziffern gleich 9 sind.

Wie viele Zahlenkombinationen dieser Art gibt es ?

15. In einer Packung mit Tulpenzwiebeln findet Anna fünf rote, drei weiße und zwei rosarote Setzlinge. Sie pflanzt diese 10 zufällig in einer Reihe an.

a) Wie viele Aussaatmöglichkeiten hat Anna dabei ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die Tulpen die die gleiche Farbe haben jeweils nebeneinander ?

16. Unter 25 Schülern werden 4 Theaterkarten zufällig ausgelost. Jeder Schüler darf bei dieser Auslosung aber höchstens eine Karte gewinnen.

Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es, falls die Plätze

a) nummeriert sind ?

b) keine Nummern haben ?

17. 10 Personen spielen zusammen ein Spiel. Dabei wird bei jedem Durchgang eine Person ausgelost, die ausscheiden muß. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden beiden Ereignisse.

a) das Ehepaar Huber bleibt vor der letzten Auslosung im Spiel.

b) Herr Huber ist die letzte Person die übrig bleibt.

18. Eine Hausfrau hat einen Karton Eier gekauft. Sie hat dabei nicht gesehen, dass davon 2 Eier verdorben sind. Zum Kuchen backen wählt sie anschließend 3 Eier zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt keines der verdorbenen Eier in den Kuchen ?

19. Bestimme die Anzahl aller genau dreistelligen Zahlen, deren Ziffern sich jeweils alle voneinander unterscheiden.

20. Aus 10 Lehrern, 8 Lehrerinnen und 20 Schülern sollen 1 Lehrer, 1 Lehrerin und 2 Schüler für den SMV-Ausschuß gewählt werden.

Auf wie viele verschiedene Arten ist diese Wahl möglich, wenn

a) jeder delegiert / gewählt werden kann ?

b) eine ganz bestimmte Lehrerin gewählt werden muß ?

c) 2 der zur Verfügung stehenden Lehrer und 5 der zur Verfügung stehenden Schüler nicht gewählt werden können ?

