Stochastik - Kapitel 1

Aufgaben ab Seite 9

I. Ereignisräume
1. Ergebnis und Ergebnisraum; Baumdiagramm

Experimente werden nach der Vorhersehbarkeit ihres Versuchsausganges unterschieden:

- Experimente, deren Ergebnisse vor den jeweiligen speziellen Versuchsdurchführungen bekannt sind nennt man deterministische (von vorneherein bestimmte) Experimente

- Experimente, über deren Ausgang man vor der Versuchsdurchführung keine sicheren Aussagen machen kann, werden als **Zufallsexperimente** bezeichnet.

Jeder einzelne Ausgang eines Zufallsexperimentes wird als **Ergebnis** ω bezeichnet.
Alle Ergebnisse ω zusammen, bilden die Menge Ω, die **Ergebnisraum** genannt wird.

Beispiele zu Ergebnissen und Ergebnisräumen:

1. Werfen einer Münze:
Mögliche Ergebnisse: ω_1 = Zahl, ω_2 = Kopf;
Ergebnismenge / Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{Z, K\}$

2. Werfen eines Würfels und Notieren der Augenzahl:
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Werfen eines Würfels und Notieren, ob die Augenzahl gerade oder ungerade ist:
$\Omega_2 = \{g, u\}$

4. Werfen eines Würfels und Notieren ob 1 (Treffer T) geworfen wird, oder nicht (Niete N):
$\Omega_3 = \{T, N\}$
$\Rightarrow$ Man kann sagen, dass Ω_2 und Ω_3 eine Verfeinerung von Ω_1 ist.

5. Eine Münze zweimal hintereinander werfen und die gefallene Seite notieren:
$\Omega = \{KZ, ZK, ZZ, KK\}$
$\Rightarrow$ Ein derartiges Experiment wird **zweistufiges Zufallsexperiment** genannt.

Merke: Besteht ein Zufallsexperiment aus n Einzelexperimenten bezeichnet man jedes Ereignis als ein n - **Tupel**.
Durch **Baumdiagramme** lassen sich die Ergebnisräume solcher zusammengesetzter bzw. mehrstufiger Zufallsexperimente am besten veranschaulichen.
Besitzt Ω n verschiedene Elemente, so existieren insgesamt 2^n verschiedene Ereignisse.

Stochastik - Kapitel 1

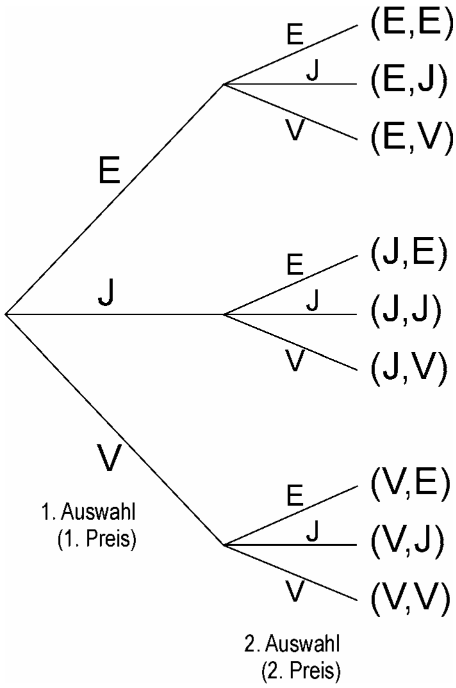
Beispiele zu Zufallsexperimenten:

1. Die Lehrerin lost unter den Schülern Elisabeth, Johannes und Viktor zufällig zwei Preise aus.
Wir suchen nun die Ergebnismenge und stellen das dazugehörige Baumdiagramm dar, für den Fall, dass ein Schüler
a) beide Preise
b) höchstens einen der Preise
erhält.

Lösung:
a) Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung)

$$\Omega = \{(E,E),(E,J),(E,V),(J,E),(J,J),(J,V),(V,E),(V,J),(V,V)\}$$

Anzahl der Elemente $|\Omega| = 3^2 = 9$



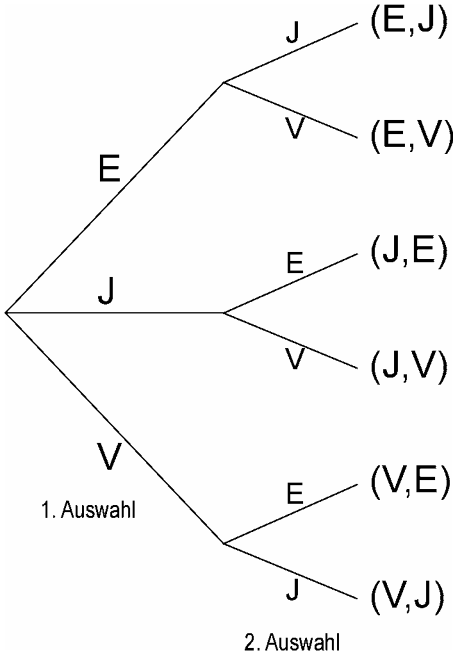
Unabhängig vom Ergebnis der ersten Auswahl, kann bei der zweiten Auswahl jeder der drei Schüler ausgewählt werden.

Stochastik - Kapitel 1

b) Ziehen ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)

$\Omega = \{(E,J),(E,V),(J,E),(J,V),(V,E),(V,J)\}$

Anzahl der Elemente $|\Omega| = 3 \cdot 2 = 6$



Derjenige Schüler, der den ersten Preis erhalten hat, darf beim zweiten Zug nicht mehr ausgewählt werden.
Die beiden Namen müssen, im Gegensatz zur Teilaufgabe a), in den Versuchsergebnissen (…,…) unterschiedlich sein.

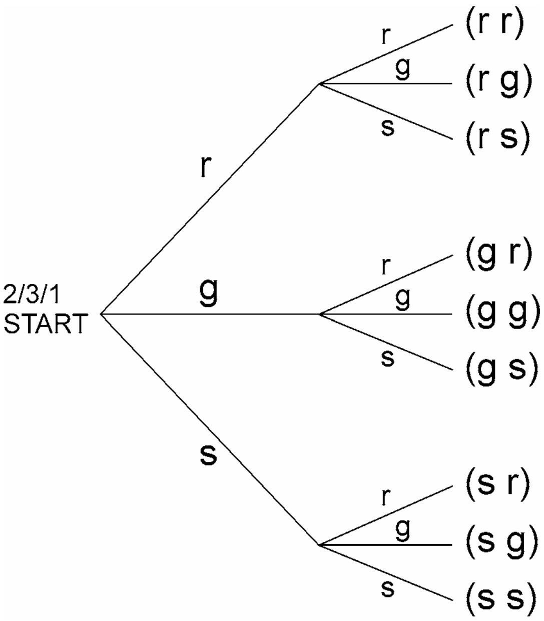
Stochastik - Kapitel 1

2. Aus einer Urne mit 2 rosafarbenen, 3 grauen und 1 schwarzen Kugel wird zweimal eine Kugel
a) mit Zurücklegen
b) ohne Zurücklegen
gezogen.
Wir suchen auch bei dieser Aufgabe den Ergebnisraum und stellen anschließend das dazugehörige Baumdiagramm dar.

Lösung:

a) mit Zurücklegen
$\Omega = \{rr, rg, rs, gr, gg, gs, sr, sg, ss\}$

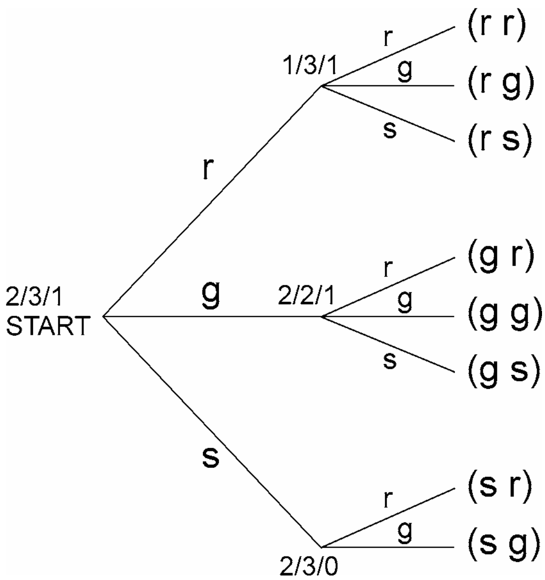
Anzahl der Elemente $|\Omega| = 9$



Der Urneninhalt bleibt bei dieser Methode mit Zurücklegen unverändert.

b) ohne Zurücklegen
$\Omega = \{rr, rg, rs, gr, gg, gs, sr, sg\}$

Anzahl der Elemente $|\Omega| = 8$



Bei diesem Modell ohne Zurücklegen verändert sich der Urneninhalt von Zug zu Zug.

Merke:

$\Rightarrow$ Mehrstufige **Zufallsexperimente** lassen sich durch **Baumdiagramme** veranschaulichen. Jeder Pfad des Baumdiagrammes stellt dabei ein einzelnes Versuchsergebnis des Gesamtexperimentes dar.

$\Rightarrow$ Beim **Ziehen mit Zurücklegen** (mit Wiederholung) sind bei jeder Stufe alle Versuchsergebnisse möglich. Die Ergebnisse der vorhergehenden Stufe sind dabei unerheblich.

$\Rightarrow$ Beim **Ziehen ohne Zurücklegen** (ohne Wiederholung) wird die Auswahlmenge jedesmal um die bereits gezogenen Stücke reduziert.

Stochastik - Kapitel 1

2. Ereignis und Ereignisraum; Ereignisalgebra

Oft ist nicht dass spezielle Versuchsergebnis ω interessant, sondern nur die Frage, ob eines von mehreren vorgegebenen Ereignissen eintritt.

Beispiele zu Ereignissen und Ereignisräumen:

1. Beim Werfen eines Würfels, können die Zahlen 1,2,3,4,5 oder 6 fallen. Die Ergebnismenge lautet somit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Der Spieler 1 wettet, dass beim einmaligen Werfen eine gerade Augenzahl fällt. Er setzt folglich auf das Ereignis
$A = \{2,4,6\}$.

Spieler 1 gewinnt, falls bei einmaligem Werfen des Würfels eine Augenzahl aus A fällt. Welche Zahl es ist, spielt keine Rolle.

$\Rightarrow$ Jede Teilmenge A des Ergebnisraumes Ω nennt man ein **Ereignis**.
$\Rightarrow$ Man schreibt: $A \subseteq \Omega$ (sprich: „A ist Teilmenge von Omega“)

$\Rightarrow$ Das Ereignis A **tritt** immer dann **ein**, wenn das bei der Durchführung des Versuchs eintretende Ergebnis ω Element von A ist.
$\Rightarrow$ Man schreibt: $\omega \in A$ (sprich: „Klein-Omega ist Element von A“)
$\Rightarrow$ Ist das Versuchsergebnis kein Element von A, dann **tritt** A **nicht ein**.
$\Rightarrow$ Man schreibt: $\omega \notin A$ (sprich: „Klein-Omega ist nicht Element von A“)

2. Beim Roulette kann man auf die Zahlen 0,1,2,3,……,36 setzen. Hier lautet die Ergebnismenge also $\Omega = \{0,1,2,3.....,36\}$.

Die Spielbank selbst gewinnt nur, wenn die Zahl 0 erscheint. Für sie ist also nur das Ereignis E = $\{0\}$ interessant.

$\Rightarrow$ Dieses Ereignis nennt man **Elementarereignis.**
Es ist dadurch gekennzeichnet, dass es nur aus einem einzigen Versuchsergebnis besteht und folglich auch nicht mehr weiter zerlegbar ist.

$\Rightarrow$ Die Menge aller Ereignisse bezeichnet man als **Ereignisraum** $P(\Omega)$.

Stochastik - Kapitel 1

3. Wieder wirft ein Spieler einen Würfel.
Wir wissen bereits, dass die Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist.
Die einzelnen Elementarereignisse lauten: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

B_1 : „Es fällt irgendeine Augenzahl, aber nicht die Zahl 6"
$B_1 = \{1,2,3,4,5\}$

B_2 : „Es fällt eine Augenzahl die prim ist"
$B_2 = \{2,3,5\}$

B_3 : „Es fällt eine Augenzahl die größer ist als 7"
$B_3 = \{\ \} = \varnothing$

B_4 : „Es fällt eine Augenzahl die kleiner ist als 10"
$B_4 = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

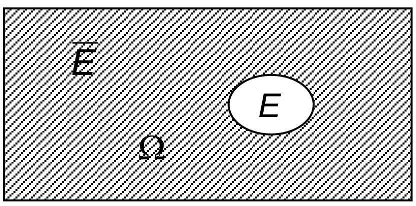
$\Rightarrow$ Ein Ereignis das niemals eintritt heißt **unmögliches Ereignis.**
Es gilt $B = \varnothing$ (sprich: „B ist leere Menge"), z.B. im Fall B_3.

$\Rightarrow$ Ein Ereignis, das bei jeder Durchführung eintritt heißt **sicheres Ereignis.**
Es gilt $B = \Omega$, z.B. im Fall B_4.

4. Ein Roulettespieler setzt auf „Ungerade" und möchte deshalb, dass das Ereignis $E = \{1,3,5,....,35\}$ fällt. Er verliert seinen gesamten Einsatz, falls das Ereignis $\overline{E} = \{0,2,4,...,36\}$ eintritt.

$\Rightarrow$ Ereignisse, die in ihrer Bedeutung jeweils entgegengesetzt sind nennt man **Gegenereignisse oder Komplementärereignisse.**

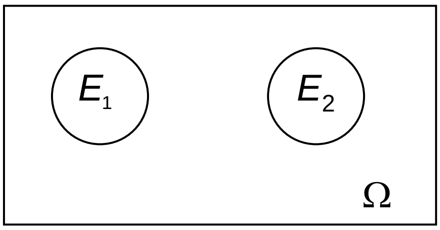
$\Rightarrow$ $\overline{E}$ umfasst alle Ergebnisse ω aus der Ergebnismenge Ω des Zufallsversuchs, die nicht in E enthalten sind. $\overline{E}$ ist deshalb folglich die Restmenge $\overline{E} = \Omega \setminus E$ (sprich: „Nicht - E ist gleich der Ergebnisraum Omega ohne E").



Stochastik - Kapitel 1

5. Ein Roulettespieler setzt einen Chip auf „Rot“ und einen weiteren auf die Farbe „Schwarz“. Es ist einleuchtend, dass der Spieler nicht mit beiden Chips gewinnen kann. Sobald eine rote Zahl gefallen ist, schließt dieses Ereignis das Fallen einer schwarzen Zahl aus, bzw. umgekehrt.

⇒ Man sagt, dass die zwei Ereignisse E_1 und E_2 **unvereinbar (disjunkt)** sind.
Das bedeutet, dass kein Ergebnis ω existiert, das Element in beiden Ereignissen ist.
Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ist immer die leere Menge $\emptyset$.



$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

(sprich: „E_1 geschnitten E_2 ist leere Menge“)

⇒ **Gegenereignisse sind immer unvereinbar.**

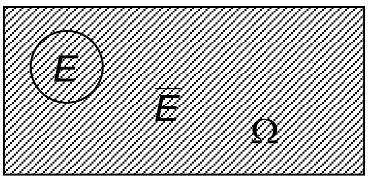
Merke: Der Durchschnitt zweier Ereignisse $A \cap B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$ tritt dann ein, wenn gleichzeitig beide Ergebnisse eintreten („A und B treten ein“).

6. Beim Roulette setzt ein Spieler auf das Ereignis „eine ungerade Zahl fällt“ und gleichzeitig auf die Zahlen 1,2,….12.
Er kann somit gewinnen, wenn entweder eine ungerade Zahl *oder* eine der Zahlen zwischen 1 und 12 fällt.

Für ihn günstig ist also deshalb:
$E = \{1,3,...,35\} \cup \{1,2,...,12\} = \{1,...,12,13,15,...35\}$
$E = E_1 \cup E_2 \rightarrow E$ ist die **Vereinigungsmenge** aus E_1 und E_2.

⇒ Wenn E_1 und E_2 .Ereignisse desselben Zufallsexperimentes sind, dann versteht man unter dem Ereignis E „E_1 **oder** E_2“ die **Vereinigungsmenge** der beiden Ereignisse.

⇒ Für Gegenereignisse gilt:



$$E \cup \overline{E} = \Omega$$

Merke: Die **Vereinigung** $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$ tritt dann ein, wenn mindestens **eines** der beiden Ergebnisse eintritt („A oder B tritt ein“).

Stochastik - Kapitel 1

Wir haben jetzt die **Verknüpfungsoperationen „ $\overline{}$,$\cup$,$\cap$“** kennen gelernt und gehen nun noch einen Schritt weiter.
Für die Ereignisse $A,B,C \in P(\Omega)$ können wir anhand der Verknüpfungen die folgenden Gesetze der **Ergebnisalgebra** anwenden.

$\Rightarrow$ ***Kommutativgesetze:***

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

$\Rightarrow$ ***Assoziativgesetze:***

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow$ ***Distributivgesetze:***

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow$ ***Gesetze von De-Morgan:***

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ $\qquad$ $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$\Rightarrow$ ***Komplemente:***

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\qquad$ $\overline{\overline{A}} = A$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = \Omega$

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 1

1. Andrea, Benjamin und Corinna möchten sich auf drei Stühle setzen. Davor überlegen sie sich aber, wie viele Möglichkeiten sie haben.
Hilf ihnen dabei und zeichne zur besseren Veranschaulichung ein Baumdiagramm.

2. Peter hat einen roten, einen blauen und zwei gelbe Holzklötze. Aus drei Steinen baut er nun einen Turm.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es um einen solchen Turm zu bauen ? Zeige das Ergebnis anhand eines Baumdiagrammes.

b) Wie viele Möglichkeiten hat Peter wenn er aus allen vier Holzklötzen einen Turm baut ?

3. Die Klasse 5a veranstaltet eine Kinder-Disco. Sie haben dafür drei nebeneinander angebrachte Scheinwerfer organisiert. Vor jedem der Scheinwerfer wollen die Klassensprecher eine farbige Folie anbringen um möglichst tolle Lichteffekte zu erreichen. Dazu stehen ihnen drei blaue und drei rote Folien zur Verfügung.

a) Wie viele Möglichkeiten haben die Klassensprecher die Scheinwerfer mit den Folien zu versehen ?

b) Der Lehrer organisiert noch zusätzlich drei grüne Folien. Wie viele Möglichkeiten, den Scheinwerfer damit zu versehen gibt es jetzt ?

4. Man wirft eine Münze dreimal. Bestimme

a) die folgenden Ereignisse:

A: genau zweimal tritt Kopf auf;
B: höchstens einmal tritt Zahl auf;
$A \cap B$;
$A \cup B$;
$A \cap \overline{B}$;

b) das Komplementärereignis von $\{(K,K,K)\}$.

5. Eine Urne enthält zwei weiße, zwei schwarze und eine rosafarbene Kugel.
Aus ihr werden

a) mit

b) ohne zwischenzeitliches Zurücklegen drei Kugeln gezogen.
Stelle für a) und b) folgendes Ereignis dar: es befinden sich zwei rosafarbene Kugeln unter den gezogenen Kugeln.

6. Man wirft fünf Würfel und interessiert sich nur

a) für die Augensumme;

b) für die Anzahl der Sechsen.
Gesucht ist jeweils die geeignete Ergebnismenge Ω.

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 1

7. Aus der Menge der Buchstaben $\{t,p\}$ werden auf gut Glück drei Buchstaben (mit Zurücklegen) zu einem „Wort“ zusammengesetzt.
Schreibe die folgenden genannten Ereignisse als Teilmenge von Ω.

a) E_1: „Der 2. Buchstabe ist t.“

b) E_2: „Nur der 2. Buchstabe ist t.“

c) E_3: „Höchstens ein Buchstabe ist t.“

d) E_4: „Mindestens ein Buchstabe ist t.“

e) E_5: „Der 1. Buchstabe ist t oder der letzte Buchstabe ist t.“

f) E_6: „Entweder der 1. Buchstabe ist t oder der letzte ist t.“

8. Ein Elektrogeschäft hat drei PC´s einer bestimmten Marke auf Lager. Bevor die Geräte zum Verkauf angeboten werden, müssen sie auf ihre Funktionstüchtigkeit überprüft werden.
A_1, A_2, A_3 seien die Ereignisse, dass die Geräte 1,2 oder 3 defekt sind.
Beschreibe durch A_1, A_2, A_3 die folgenden Ereignisse.

a) alle PC´s sind defekt.

b) mindestens ein PC ist defekt.

c) der erste PC ist defekt.

d) alle PC´s funktionieren ordnungsgemäß.

e) höchstens ein PC ist defekt.

f) genau zwei PC´s sind funktions**un**tüchtig.

9. Hans wirft dreimal hintereinander mit einem Ball auf eine Dose. Wir unterscheiden nur zwischen Treffer T und Nichttreffer N.

a) Gib den Ergebnisraum Ω an und zeichne ein Baumdiagramm.

b) Schreibe die Folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω.

E_1: „Mindestens ein Wurf ist ein Treffer.“

E_2: „Höchstens ein Wurf ist ein Treffer.“

E_3: „Genau ein Wurf ist ein Treffer.“

E_4: „Der erste Wurf ist ein Treffer.“

E_5: „Ein Wurf ist ein Nichttreffer.“

E_6: „Nur der erste Wurf ist ein Treffer.“

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 2

1. Gib jeweils den Ergebnisraum an:

a) Es werden zwei Münzen geworfen (Kopf = K, Zahl = Z)

b) Aus den Ziffern 2,4,5,7 werden zweistellige Zahlen gebildet. Keine Ziffer soll darin zweimal auftreten.

c) Aus einer Urne mit 4 grünen und 2 rosafarbenen Kugeln werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

d) Aus derselben Urne werden nochmals die in c) genannten Kugeln gezogen. Dieses Mal allerdings mit der Methode ohne Zurücklegen.

2. In einer Mathematikschulaufgabe stellt der Lehrer vier Aufgaben 1,2,3,4. Die Schüler müssen davon zwei Aufgaben bearbeiten.
Zu den folgenden Ereignissen ist jeweils die dazugehörige Teilmenge von Ω gesucht, wenn die Reihenfolge der Bearbeitung nicht unterschieden wird.
Gib diese Teilmengen an.
Nenne außerdem zu jedem der Ereignisse das Gegenereignis.

a) E_1: „Die Aufgabe 1 muß bearbeitet werden.“

b) E_2: „Ist eine der bearbeiteten Aufgabennummern gerade, dann muß die andere Aufgabennummer ungerade sein.“

c) E_3: „Es muß mindestens eine ungerade Aufgabennummer bearbeitet werden.“

d) E_4: „Es müssen nur gerade Aufgabennummern bearbeitet werden.“

3. Es sind drei Ereignisse A, B, C gegeben. Es trete(n)

a) nur C ein.

b) mindestens ein Ereignis ein.

c) höchstens zwei Ereignisse ein.

d) genau zwei Ereignisse ein.

e) keines der Ereignisse ein.

f) mindestens ein Ereignis nicht ein.

Stelle diese Ereignisse a) – f) durch A, B, C dar.

4. Von 25 Schülern belegen fünf weder den Grundkurs Deutsch noch den Grundkurs Bio. Elf Schüler nehmen am Grundkurs Bio teil, drei Schüler belegen alle beide Kurse.
Wie viele Schüler belegen dann den Grundkurs in Deutsch ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 2

5. Aus einer Urne mit vier rosafarbenen und zwei silbernen Kugeln werden mit verbundenen Augen zwei Kugeln gezogen.
Zwei verschiedene Arten des Vorgehens sollen dabei ausprobiert werden:

a) Man zieht mit beiden Händen.

b) Man zieht nur mit einer Hand.

Nenne alle Fälle die auftreten können.

6. Einige Freunde spielen folgendes Spiel: Jeder Mitspieler wirft zunächst einmal einen Würfel, danach eine Münze. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die höchste Augenzahl gewürfelt hat. Im Falle eines Gleichstandes zwischen mehreren Mitspielern gewinnt derjenige, der beim Münzwurf „Zahl“ geworfen hat.

Zeichne zu diesem Spiel ein Baumdiagramm.

7. Beim Morsen gibt es keine Buchstaben. Man verwendet nur Punkte für ein kurzes Signal und Striche für ein langes Signal.

Wie viele verschiedene Zeichenfolgen aus Punkten und Strichen kann man aus zwei Zeichen (aus drei Zeichen) bilden ?

8. Ein Fahrradschloss mit einer Zahlenkombination hat 4 Scheiben. Auf jeder dieser Scheiben kann man eine Ziffer von 1-6 einstellen.

a) Wie viele Einstellungsmöglichkeiten gibt es insgesamt ?

b) Stefan kann sein Schloss nicht mehr öffnen, da er seine Geheimnummer vergessen hat. Er kann sich aber noch erinnern, dass die Nummer mit einer 4 beginnt und dass wenigstens eine 1 darin vorkommt. Außerdem weiß Stefan noch, dass nur zwei nebeneinander stehende Ziffern identisch sind.

Welche Ziffernkombinationen kommen nur für Stefans Schloss in Frage ?
Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten sind es ?

9. Hans hat drei Bücher geschenkt bekommen: **F**ünf Freunde, **H**arry Potter und **K**ickers.

In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann er seine drei Bücher im Regal anordnen ? Zeichne ein Baumdiagramm zur besseren Übersicht.

10. Kathrin möchte ihr Deutsch-, Englisch- und Biologiebuch im Regal deponieren.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es um die Bücher nebeneinander zu stellen ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 2

11. Für ein Gartenfest sollen zwei grüne und zwei rote Lampions in einer Reihe aufgehängt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten die Lampions anzubringen gibt es ? Zeichne ein Baumdiagramm dazu.

12. Ein Autohersteller verkauft ein Sondermodell in drei unterschiedlichen Ausführungen: Normal (N), Luxus (L) und Super (S). Alle Modelle sind in den Farben weiß und blau und mit drei verschiedenen Motorausführungen erhältlich, nämlich 66kW, 74 kW und 92kW.

Wie viele Fahrzeuge müsste der Händler in seinem Lager stehen haben, damit er alle möglichen Kundenwünsche auf einmal erfüllen könnte ?

13. Frau Braun hat in ihrem Kleiderschrank 4 Blusen, 2 Hosen und 3 Pullover aufgehängt, die alle sehr gut zusammen passen. Sie kann sich nicht entscheiden welche Kleidungsstücke sie miteinander tragen soll.

Wie viele Kombinationsmöglichkeiten besitzt Frau Braun eigentlich insgesamt ?

