Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

Was versteht der Mathematiker unter Wachstum oder Abnahme (Zerfall oder negatives Wachstum) mit exponenziellem Charakter ?
Wachstum oder Abnahme wird als exponenziell betrachtet, wenn sich der Vorgang durch eine Exponenzialfunktion beschreiben lässt.
Charakteristisch daran ist, daß sich eine Größe pro Zeiteinheit um einen festen Prozentsatz ändert (z.B. pro Stunde um 5% zunimmt). Oder etwas allgemeiner formuliert:
Die in Betracht kommende Größe ändert sich in gleich langen Zeitintervallen um den gleichen Faktor. Der relative Zuwachs, auch Wachstumsrate genannt, ist immer konstant.
Genau genommen geht es nicht immer nur um zeitliche Abläufe sondern ganz allgemein um das Verhalten einer Größe in Abhängigkeit von einer anderen (wie z.B. die Lichtdurchlässigkeit als Funktion der Dicke einer Glasscheibe).

Beispiele für dieses Wachstumsverhalten finden sich in Physik, Chemie, Biologie, aber auch in der Medizin oder im Finanzwesen:

+ Radioaktiver Zerfall von Atomen
+ Wachstum einer Bakterienkultur oder einer natürlichen Population während eines begrenzten Zeitraums
+ Aufladen eines Kondensators im Gleichstromkreis
+ Luftdruckveränderung mit der Höhe
+ Verzinsung eines Kapitals

Neben kontinuierlichen Wachstumsvorgängen bezeichne ich das Wachstum, das nur in bestimmten Schritten erfolgt, als schrittweises exponenzielles Wachstum.
Ein Beispiel hierfür wäre die Berechnung von Zinseszinsen. Im Allgemeinen werden Zinsen nicht sofort und ständig, sondern nur zu bestimmten Terminen (z.B. Monatsende) gut geschrieben. Dazwischen weist das Konto keine Veränderung auf.

Auf unserer Erde wird jedes natürliche Wachstum durch äußere Einflüsse begrenzt.
Irgendwann stößt das Wachstum an Grenzen, die den Prozeß verlangsamen und die Grenzen des Wachstums bestimmen.
Damit gelten alle Wachstumsmodellrechnungen nur für einen bestimmten Zeitraum.
Das Wachstum der Weltbevölkerung war zwischen dem Jahre 1700 und 1960 konstant.
Es verdoppelte sich etwa alle 35 Jahre. Würde dieses Wachstum aber bis zum Jahre 2500 ebenso fortdauern, wäre eine Bevölkerungszahl von ca. 150 000 Milliarden Menschen zu erwarten. Das ist vollkommen unmöglich.
Dennoch sind die mathematischen Modelle eine fundierte Grundlage um Vorhersagen oder auch die Grenzen des Gültigkeitsbereiches zu ermitteln.

Die Exponenzialfunktion läßt sich mit beliebiger Basis oder mit der Basis e darstellen.
In den Lösungen zur nachfolgenden Aufgabensammlung wird die Basis e nicht verwendet (bis auf eine Ausnahme). In einer Parallel-Datei möchte ich, wenn es die Zeit erlaubt, alternativ auch die Basis e einsetzen.

Die nachfolgend angegebenen Formeln bzw. Formelzeichen sind in den vielen Mathebüchern durchaus unterschiedlich dargestellt. Ich habe mich nun für die folgenden Formelbuchstaben entschieden:

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

Wachstumsgesetz:

$$y = b \cdot a^x$$

a = Wachstumsfaktor
b = Startwert bzw. Ausgangswert zum Zeitpunkt x = 0
x = Zeitwert
y = Endwert

Ein Wachstum mit **konstantem Wachstumsfaktor** in **gleichen Zeitspannen** nennt man **exponenzielles Wachstum.**

Ist der Wachstumsfaktor **a > 1** so handelt es sich um eine **Zunahme** (Wachstum)

Ist der Wachstumsfaktor **0 < a < 1** so handelt es sich um eine **Abnahme** (Zerfall)

Zinseszinsrechnung:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

K_0 = Startkapital vor der Verzinsung
K_n = Kapital nach n Jahren
q = Zinsfaktor
n = Anzahl der Zinsjahre
p = Zinssatz in %

Die Formeln gelten wenn ein festes Kapital auf einem Anlagekonto mehrere Jahre verzinst wird ohne daß man am Ende jeden Jahres die Zinsen abhebt. Die jeweils angefallenen Zinsen werden auch mit verzinst.

Zerfallsgesetz für die Halbwertszeit radioaktiver Elemente:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$$

N(t) = restliche (nicht zerfallene) Masse zum Zeitpunkt t
N_0 = Masse zu Beginn des Zerfalls
t = Zerfallszeitraum
T = Halbwertszeit des Isotops

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

Aufgaben

1. Ein Waldbestand von ca. 40 000 fm (Festmeter) wächst mit einer jährlichen Zuwachsrate von 3% (also exponenziell).

a) Um wieviel fm wird der Bestand in 4,5 Jahren gewachsen sein, wenn inzwischen kein Holz geschlagen wird und die Bedingungen sich nicht wesentlich ändern ?

b) Um wieviel fm Holz ist der Wald in den vergangenen 3 Jahren gewachsen (vorausgesetzt die Wachstumsbedingungen waren annähernd konstant gewesen) ?

2. Im Jahre 1993 lebten in Mexiko etwa 92 Mio. Menschen. Die Bevölkerung dort nahm jährlich um ca. 1,75% zu.
Wie viele Menschen werden im Jahre 2013 in Mexiko leben, wenn man annimmt, daß das Wachstum konstant bleibt ?

3. Der Kaninchenbestand in einem Streichelzoo wuchs in 12 Jahren exponenziell von 30 auf 125 Kaninchen an.

a) Wie groß war der jährliche Wachstumsfaktor ?

b) Berechne den Prozentsatz der jährlichen Zunahme.

4. Die Einwohnerzahl Afrikas im Jahre 1991 betrug etwa 712 Mio. Im Jahre 2001 rechnete man dort mit einer Bevölkerung von 948 Mio.
Um wie viel Prozent hat die Bevölkerung jährlich zugenommen ?

5. Die Weltbevölkerung wurde im Jahre 1996 auf 5,9 Milliarden Menschen geschätzt bei einem jährlichen Wachstum von ca. 1,5%.
In welchem Jahr würde die Menschheit bei gleichem Wachstum die 10-Milliarden-Grenze erreichen ?

6. In Äthiopien lebten 1995 etwa 60.100.000 Menschen bei einer Wachstumsrate von 3,2%.

a) Berechne für diese Wachstumsrate die Bevölkerungszahl im Jahre 2010.

b) In welchem Jahr hätte sich bei gleich bleibendem Wachstum die Bevölkerungszahl verdoppelt ?

7. In einer Bakterienkultur werden 2 Stunden nach dem Ansetzen rund 600, nach weiteren 4 Stunden rund 25.000 Bakterien gezählt.

a) Wie viele Bakterien waren (bei exponenziellem Wachstum) 3 Stunden nach dem Ansetzen der Kultur entstanden ?

b) Wie groß ist die stündliche Zuwachsrate der Bakterienkultur in Prozent ?
Stelle das Wachstum für die ersten 60 Minuten nach dem Ansetzen grafisch dar.

8. Wir nehmen an, daß sich die Seerosen in einem Teich wöchentlich verdoppeln.

a) Wie viel Prozent wachsen die Seerosen täglich ?

b) Nach wie viel Tagen hat sich die Seerosenpopulation versechsfacht ?

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

9. Die Anzahl der Bakterien auf einer Nährlösung wächst annähernd exponenziell. Um 10 Uhr werden 1600 Bakterien gezählt. Es ist bekannt, daß die Kultur stündlich um 5,2% wächst.

a) Wie viel Bakterien waren um 6 Uhr in der Kultur ?

b) Berechne die Anzahl Bakterien die um 12 Uhr des nächsten Tages auf der Nährlösung gezählt werden können.

c) Wie groß ist die Generationszeit der Bakterien ?

10. Ein PKW kostet als Neufahrzeug 24.200 EUR. Der jährliche Wertverlust des Autos kommt auf 20% des jeweiligen Zeitwertes. Handelt es sich um einen linearen oder exponenziellen Vorgang ? Bestimme die Zuordnungsvorschrift.

11. Unter Inflation versteht man einen Kaufkraftverlust oder auch Geldentwertung. Nach welcher Formel kann man die Kaufkraft von 1 EUR in x Jahren berechnen, wenn die konstante jährliche Inflationsrate p % ist ?

12. Der auf die Erdoberfläche wirkende statische Druck der Atmosphäre wird als Luftdruck bezeichnet. Der Luftdruck der Erdatmosphäre nimmt mit der Höhe angenähert exponenziell ab. Die Abnahmerate beträgt ca. 13 % pro 1000 m.

a) Wie lautet die Vorschrift, die der Höhe H (in m) den Luftdruck p zuordnet ? Ausgangswert ist ein Luftdruck von 1000 hPa (Hektopascal) am Boden.

b) Welcher Luftdruck herrscht in 3500 m Höhe ?

13. Je tiefer ein Taucher in einen See hinabtaucht, um so stärker verringert sich die Beleuchtungsstärke des Sonnenlichtes. Mit jedem Meter Wassertiefe nimmt die Beleuchtungsstärke um etwa 39% ab,

a) Gib die Formel für die Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von der Wassertiefe an. Die Beleuchtungsstärke an der Wasseroberfläche soll mit 1 angenommen werden.

b) Um wie viel Prozent hat sich die Beleuchtungsstärke in 10 m Wassertiefe gegenüber dem Wert an der Wasseroberfläche verringert ?

14. Ein Kapital von 6.000 EUR wird bei einer Bank zu einem festen Zinssatz von 3.5 % für acht Jahre angelegt. Die Zinsen verbleiben auf dem Konto und werden jeweils am Jahresende dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst.

a) Auf wieviel EUR ist das Kapital nach Ablauf der acht Jahre angewachsen ?

b) Nach wie viel Jahren hat sich das Kapital verdoppelt, unter der Voraussetzung, daß sich der Zinssatz nicht ändert ?

15. Ein Kapital von 110.000,- € wächst in 4 Jahren mit allen Zinsen auf 133.705,69 €. Dabei wurden die Zinsen jährlich gutgeschrieben.

Wie hoch ist der Zinssatz ?

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

16. Ein Kapital auf einer amerikanischen Bank wurde mit 4,5% jährlich verzinst und ist in 40 Jahren mit Zins und Zinseszins auf 1.163.273 Dollar angewachsen.

Wie hoch war das Anfangskapital ?

17. Frau Meier hat vor fünf Jahren für 115.000 EUR ein Haus gekauft. Sie kann es heute für 137.000 EUR wieder verkaufen.

Wie hoch war die durchschnittliche Verzinsung pro Jahr ?

18. Ein beliebiges Kapital soll sich in 35 Jahren verfünffacht haben.

Welcher Zinssatz muß vereinbart werden, wenn dieser die fünf Jahre konstant sein soll und die Zinsen stets dem Kapital zugeschlagen werden ?

19. Der Preisanstieg betrug 1985 in der Bundesrepublik 2,9 %.

Wieviel kostet demnach 1 Liter Milch (Preis im Jahr 2007: 0,79 EUR) in 5 und in 10 Jahren, wenn man diesen Preisanstieg auch für die kommenden Jahre zugrunde legt ?

20. Die Glastür eines Mikrowellenherdes soll die Strahlung (elektromagnetische Wellen) aus dem Inneren dämpfen. Je nach Glasdicke ergeben sich unterschiedliche Dämpfungswerte S in % (siehe folgende Tabelle).

a) Stelle den Zusammenhang zwischen Glasdicke d und Dämpfungsfaktor S in einer Formel dar.

b) Maximal 1% der Strahlung darf durch die Tür austreten (lt. Gesetzgeber). Welche Glasdicke ist mindestens einzubauen ?

c) Wie hoch ist die Strahlungsemission wenn das Glas 6 mm dick wäre ?

d in mm	1	2	3
S in %	30	9	2,7

21. Durch mehrere Zerfallsprozesse entsteht aus dem natürlich vorkommenden Isotop Uran ^{234}U das radioaktive Wismut ^{210}Bi. Von Wismut ^{210}Bi zerfallen wiederum jeden Tag etwa 13% und wandeln sich in zwei weitere Isotope um.
Bestimme die Menge an Wismut Wismut ^{210}Bi die von ursprünglich 20 g nach 12 Tagen noch übrig sind.

22. Radioaktive Stoffe wie z. B. Radium ^{226}Ra oder Caesium ^{137}Cs senden Strahlen aus und zerfallen dabei. Von den jeweiligen Isotopen sind nach der Zeit t nur noch die Hälfte vorhanden; diese Zeit t heißt "Radioaktive Halbwertszeit".

a) Bei der Umwandlung des Radiumisotops ^{226}Ra beträgt die Halbwertszeit 1602 Jahre. Nach wie viel Jahren hat man von ursprünglich 20 Gramm nur noch 19 Gramm des Isotops zur Verfügung?

b) Nach wie viel Jahren ist die radioaktive Substanz auf 1% ihrer Ausgangsmenge (20 g) zerfallen ?

Exponenzielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

Klasse 10

23. Von einem Isotop zerfallen in 12 Jahren 9,5%.
Berechne die Halbwertszeit dieses Stoffes.

24. Das radioaktive Nuklid Radon ^{222}Rn zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen. Berechne, wie viel Prozent der Ausgangsmenge von 5 Gramm nach 25 Tagen noch vorhanden sind.

25. Bei einer Schilddrüsenuntersuchung wird einem Patienten radioaktives Jod mit einer Halbwertszeit von 8 Tagen verabreicht.
Wieviel Prozent des verabreichten Jodisotops kann der Patient nach 3 Wochen höchstens noch in seinem Körper haben ?

26. Uran ^{231}U ist radioaktiv. Von 10.000 Kernen zerfallen pro Tag ca. 1591 Kerne.
Wie viel Uran ^{231}U ist nach 8 Tagen noch vorhanden, wenn die Ursprungsmenge bei 100 Gramm lag ? Wie lang ist die Halbwertszeit ?

27. Mit der ^{14}C - oder Radiokarbonmethode ist es möglich, das absolute Alter von organischen Stoffen z.B. Pflanzenresten zu bestimmen.
Jedes Lebewesen nimmt laufend den natürlich in der Atmosphäre vorkommenden, radioaktiven Kohlenstoff ^{14}C auf, und gibt einen Teil davon als Stoffwechselprodukt auch wieder ab. Auf diese Weise besteht im lebenden Organismus ein Gleichgewicht mit dem nicht radioaktiven Kohlenstoff ^{12}C. Dieses Verhältnis beginnt sich erst ab Eintreten des Todes zu verschieben, da nun kein ^{14}C mehr aufgenommen werden kann. Mit Hilfte der Halbwertszeit des radioaktiven Kohlenstoffes kann so der Zeitpunkt des Todes berechnet werden.
Jedes Gramm Kohlenstoff, das aus einer Probe einer lebenden Pflanze gewonnen wurde, enthält $N_0 = 6{,}0 \cdot 10^{10}$ ^{14}C-Atome. Nach dem Tod der Pflanze wird kein ^{14}C mehr aufgenommen und die Zahl der ^{14}C-Atome nimmt ab. Nach 10.000 Jahren sind noch $1{,}8 \cdot 10^{10}$ ^{14}C-Kerne vorhanden.

a) Stelle den Zerfallsprozeß in einem Diagramm dar.
Die Ordinate (Hochachse) ist hierbei mit einer logarithmischen Skala zu versehen.
Abszisse: Zeitachse mit 1 cm $\hat{=}$ 1000 Jahren
Ordinate: Anzahl ^{14}C-Atome mit $1 \cdot 10^{10} \le N \le 10 \cdot 10^{10}$

b) Berechne die Halbwertszeit T

c) Aus alten Hirsekörnern die man in einem Pharaonengrab fand, wurde 1 Gramm reiner Kohlenstoff extrahiert. Das Material enthielt $3{,}78 \cdot 10^{10}$ ^{14}C-Atome.
Wann ungefähr könnte der Pharao im Grab beigesetzt worden sein ?