Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

1. Erkläre folgende Begriffe:

a) Ursprungsgerade
b) Steigung bzw. Steigungsdreieck
c) Steigende u. fallende Gerade
d) Geradenbüschel, Parallelenschar
e) y-Achsenabschnitt
f) Lineare Funktion
g) Normalform der linearen Funktion

2. Zeichne die durch folgende Gleichungen gegebenen Geraden in ein Koordinatensystem und gib zu jeder Geraden ihre Steigung an.

a) $y = 2x$ b) $y = -\frac{1}{3}x$ c) $y = -4{,}5x$ d) $-2x - 3y = 0$

e) $\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}x = 0$ f) $3y - 3x = 0$

3. Prüfe <u>durch Rechnung</u> nach, ob folgende Punkte auf der jeweiligen Geraden liegen.

a) $P_1\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{5}\right)$; $P_2(-0{,}6\,|\,-1{,}5)$ $g_1:\ 5x - 2y = 0$

b) $A(6\,|\,3)$; $B(-5\,|\,-2)$ $g_2:\ -5y + 2x = 0$

4. Gib jeweils die Gleichung der Geraden an, die durch den Ursprung (0 | 0) und einen der folgenden Punkte verläuft.

a) $A(2{,}5\,|\,-3)$ b) $B(-4{,}5\,|\,0)$ c) $C\left(\frac{1}{3}\middle|-1\frac{2}{5}\right)$

Anleitung: Die Gleichung einer Ursprungsgeraden hat die Form y = mx.
Die Koordinaten der Punkte gehören zur Lösungsmenge. Setze die Koordinaten der Punkte für x und y ein und ermittle damit m.

5. Prüfe <u>durch Rechnung</u>, ob folgende Punkte auf derselben Ursprungsgerade liegen

a) $A_1(0{,}3\,|\,2{,}7)$ $A_2(0{,}6\,|\,0{,}54)$

b) $B_1\left(\frac{1}{5}\middle|0{,}8\right)$ $B_2\left(0{,}4\middle|\frac{8}{5}\right)$

c) $C_1(6\,|\,3)$ $C_2(-6\,|\,-3)$

6. Gegeben sind die Funktionen $g_1: y = -\frac{1}{4}x$ und $g_2: -5y + 12x = 0$

Zeichne jeweils den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem und dazu den Graph der entsprechenden Umkehrfunktion g_1^{-1} und g_2^{-1}. Gib die Funktionsgleichung der Umkehrfunktionen an.

Hinweis: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung der Funktion an der Geraden y = x.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

7. Gegeben sind die Geraden $g_1: y - 0{,}45x = 0$ und $g_2: 6x + 10y = 0$.

Zeichne die gegebenen Geraden und die im Koordinatenursprung auf ihnen senkrecht stehenden Geraden. Ermittle deren Funktionsgleichung.

8. Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ($x = 0$, $y = 0$)

a) $5x - 2y + 1 = 0$ b) $y = -2(x+2) + 6$ c) $0{,}75(x+2) - 3 - y = 0$

9. a) Die Gerade g hat die Steigung $m = 2{,}5$ und verläuft durch den Punkt $S(-3 \mid -17)$. Wie lautet die Geradengleichung in der Normalform?

b) Ermittle durch Rechnung die Normalform einer Geradengleichung deren y-Achsenabschnitt $-4{,}5$ ist und deren Graph durch den Punkt $A\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{5}{6}\right)$ verläuft.

10. Bestimme die Gleichungen der Geraden durch folgende Punkte mit drei verschiedenen Lösungswegen.

a) $A(0 \mid -3)$ und $B(1{,}5 \mid 4)$

b) $P(-6 \mid -7)$ und $Q(-11 \mid 2{,}5)$

c) $S(12 \mid 1{,}5)$ und $T(8 \mid -1{,}5)$

11. Die Punkte $A(0 \mid -4)$ und $B(10 \mid 0)$ liegen auf der Geraden g, die Punkte $P(-0{,}5 \mid 11)$ und $Q(8{,}5 \mid -2{,}5)$ liegen auf der Geraden h.

Bestimme durch Rechnung jeweils die Funktionsgleichung der beiden Geraden und die Koordinaten ihres Schnittpunkts S.

Ermittle die Schnittpunkte der Geraden h mit den Koordinatenachsen.

12. a) Gegeben sind die beiden Funktionen $f: y = -0{,}5x + 3$ und $g: 3x - 2y = 6$. Zeichne die zu den Funktionen gehörenden Graphen in ein Koordinatensystem und **berechne** ihren gemeinsamen Schnittpunkt.

b) Gegeben sind zwei **unvollständige** lineare Funktionen:

$g: y = -4x + ...$

$h: y = ...x + 5$

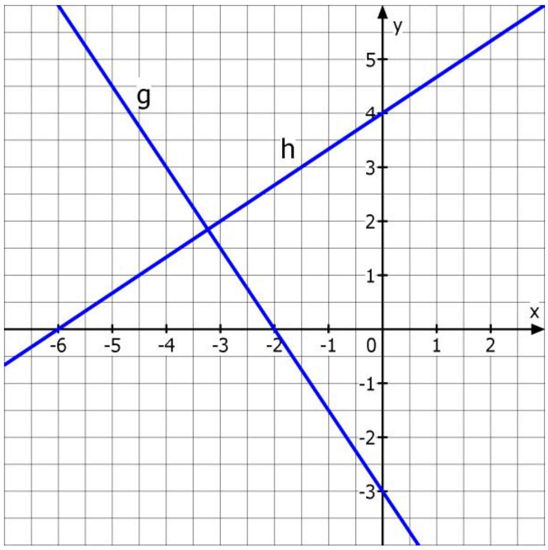
Vervollständige beide Funktionsgleichungen für folgende Bedingungen:
Beide Geraden stehen senkrecht aufeinander, und
die Gerade g verläuft durch den Punkt $P(-2{,}5 \mid 12)$

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

13. a) Gegeben sind die Geraden g und h zweier linearer Funktionen (siehe nebenstehendes Bild).

Zeichne zu jeder Geraden ein Steigungsdreieck und gib die beiden Geradengleichungen an.

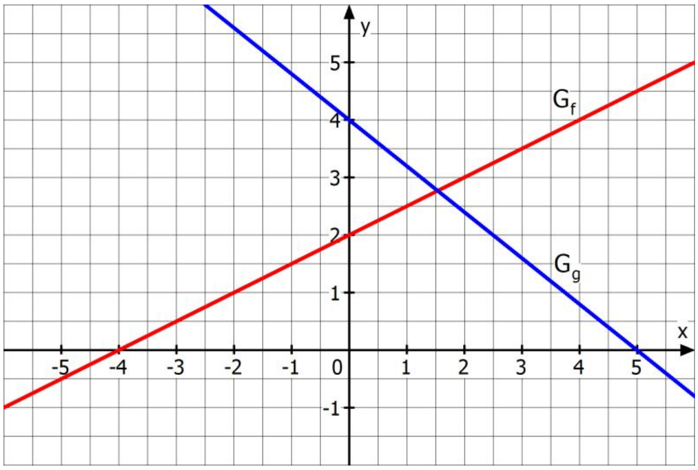


b) Bestimme die Gleichung der Geraden s, die parallel zur Geraden $y = -0{,}2x + 16$ und durch den Punkt $R(-3\,|\,-1)$ verläuft.

c) Bestimme die Gleichung der Geraden t, die durch den Punkt $S(-3\,|\,-4)$ verläuft und die x-Achse bei $x = 5$ schneidet.

14. a) Gib zu den Graphen G_f und G_g jeweils die Zuordnungsvorschrift an. Lese günstige Werte aus dem Diagramm ab.

b) Begründe rechnerisch, ob der Punkt $P(-40\,|\,-17{,}5)$ genau auf, über oder unter dem Graphen G_f liegt.



15. Gegeben ist die Gerade g mit $y + 3{,}5(x-2) + 5 = 0$.

Bestimme die auf der gegebenen Geraden senkrecht stehende Gerade h. Der Schnittpunkt beider Geraden soll auf der x-Achse liegen. Gib die Geradengleichung von h an.

16. Die Gerade $g:\ y = -\frac{5}{4}x + 5$ bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne seinen Flächeninhalt. $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

17. Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2{,}5x - 2$.

a) Zeige, dass der Punkt $P(4 \mid 8)$ auf g liegt.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden f, die durch P geht und senkrecht auf g steht (Skizze !).

c) Die beiden Geraden schneiden die Senkrechte $x = -1$ in den Punkten R und S. Berechne die Fläche des Dreiecks PRS (Skizze !)

18. Gegeben sind die beiden Geradengleichungen $m:\ y = 3x - 1$ und $n:\ y = -\frac{3}{2}x + 8$.

a) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt S der beiden Geraden.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Geraden m und n mit der x-Achse einschließen. (Skizze!)

19. a) Zeichne die Gerade $g:\ y = -\frac{2}{3}x + 3$ in ein Koordinatensystem. Spiegle die Gerade g sowohl an der x-Achse als auch an der y-Achse als auch am Ursprung. Gib jeweils die Funktionsgleichungen an.

b) Die vier Geraden aus Teilaufgabe a) schließen ein Viereck ein. Ermittle den Flächeninhalt dieses Vierecks. $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$

20. a) Zeichne die Menge aller Punkte $S(x \mid -0{,}5x + 2)$ in ein Koordinatensystem $(x \in \mathbb{Q})$. Auf welcher Ortslinie liegen sie?

b) Die Punkte S werden mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ parallel verschoben. Die Bildpunkte heißen T. Zeichne die Ortslinie der Punkte T ein. Gib die Menge aller Punkte T in Koordinatenschreibweise an.

21. Die Gleichung $y = 3x - (a + 2)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ beschreibt bezüglich $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ die Parallelenschar g(a).

a) Gib die Gleichung der Scharparallelen g_1 an, die durch den Punkt $A(-6 \mid 1{,}5)$ verläuft.

b) Belegt man a einmal mit 2 und dann mit -8, erhält man zwei Geraden g_2 und g_3. Ermittle die Gleichung der Mittelparallelen g_4 zu den Parallelen g_2 und g_3. Gib die zugehörige Zahl a an.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

22. Gegeben ist die Gleichung einer Parallelenschar g(t): $y = -2x + t$.

a) Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g_1: $2x - 3y + 5 = 0$ der Parallelenschar angehört.

b) Für welchen Wert von t erhält man jeweils die Gleichung der Schargeraden, die durch die Punkte $A\left(-2 \mid 3\right)$ und $B\left(1{,}5 \mid -8\right)$ verlaufen?

c) Gibt es eine Schargerade die zugleich durch die Punkte $P_1\left(-4 \mid 4\right)$ und $P_2\left(3 \mid -5\right)$ verläuft? Zeige dies rechnerisch.

d) Wie lautet die Gleichung der Parallelenschar h(t), deren Geraden auf denen der gegebenen Schar g(t) senkrecht stehen?

23. Alle Geraden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, gehören einem Geradenbüschel an.

a) Durch welchen Punkt Q verlaufen alle Geraden des Geradenbüschels $g(m): y = mx + 3$?

b) Für welche Werte von m erhält man die Gleichungen der Büschelgeraden, die durch die Punkte $A\left(0{,}4 \mid 3\right)$, $B\left(-2 \mid 4\right)$ und $C\left(2{,}5 \,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)$ verlaufen?

c) Zeige rechnerisch, ob es eine Büschelgerade gibt, die gleichzeitig durch die Punkte $U\left(2 \mid 5\right)$ und $V\left(-3 \mid 0\right)$ verläuft.

d) Ein zweites Geradenbüschel h(m) hat den Büschelpunkt $R\left(3 \mid 4\right)$. Gib die Gleichung des Geradenbüschels an.

e) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die beiden Büscheln gleichzeitig angehört?

f) Gib die Gleichungen der Geraden beider Büschel an, die auf der Geraden mit $y = \frac{1}{3}x + 3$ senkrecht stehen.

24. Das Geradenbüschel g(m) mit $y - mx + 2m + 5 = 0$ und die Parallelenschar g(t) mit $y - 2x - t = 0$ sind gegeben.

a) Bringe die Büschelgleichung auf die Form $y = m\left(x - x_1\right) + y_1$ (Punkt-Steigungsform) und gib die Koordinaten des Büschelpunktes B an.

b) Zeichne den Büschelpunkt, die Büschelgeraden für $m \in \left\{0; \pm 1; \pm 3\right\}$ und die Schargeraden für $t \in \left[-4;\ 4\right]_{\mathbb{Z}}$ in ein Koordinatensystem.

c) Gib die Gleichung derjenigen Büschelgeraden an, die auch Ursprungsgerade ist.

d) Welche Gerade der Parallelenschar ist gleichzeitig Büschelgerade?

e) Welche der Büschelgeraden steht auf allen Schargeraden der Parallelenschar senkrecht?

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

25. Gegeben sind die Punkte $P(0\,|\,2)$ und $Q(k\,|\,-2)$.

a) Stelle in Abhängigkeit vom Parameter k die Funktionsgleichung der Schar $f_k(x)$ auf, die durch die Punkte P und Q bestimmt wird. Welche Werte darf hierbei der Parameter k annehmen?

b) Bestimme die Schnittpunkte S_x und S_y der Funktionenschar mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit vom Parameter k.

c) Gib diejenigen Geraden aus der Schar an, die parallel zur x-Achse bzw. parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verlaufen.

d) Welche Gerade aus der Schar steht senkrecht auf der Geraden $h(x) = -4x + 3$? Gib die Gleichung dieser Geraden an. Bestimme außerdem den Schnittwinkel dieser Geraden mit der x-Achse.

e) Haben alle Geraden der Funktionenschar einen gemeinsamen Schnittpunkt? Wenn ja, gib diesen an.

26. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt $P(1\,|\,3)$ und hat eine Nullstelle bei x = 5.

a) Erstelle die Funktionsgleichung.

b) Berechne den Neigungswinkel α gegen die x-Achse.

c) $Q(3\,|\,q)$ soll stets unterhalb von g liegen. Welche Bedingungen muss q erfüllen?

27. Gegeben ist die Gerade $g: f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$.

a) Erstelle die Gleichung aller Geraden, die zu g parallel sind.

b) Erstelle die Gleichung aller Geraden, die den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse haben.

28. Gegeben ist der Punkt $P(4\,|\,1)$ und die Funktionenschar mit der Gleichung

$f_m(x) = (m-1)x + 2m\,; \quad m \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die den Punkt P enthält.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden aus der Schar, die auf $h(x) = -2x + 8$ senkrecht steht.

c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_x und S_y mit den Koordinatenachsen.

d) Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden der Schar?

e) Zeichne die in a) und b) ermittelten Geraden in ein Koordinatensystem ein.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

29. Gegeben ist die Geradenschar $g_k: y = (2k-1)x + k; \quad k \in \mathbb{R}$

a) Für welches k verläuft die zugehörige Gerade der Schar durch $P(1|-3)$?
Gib die entsprechende Funktionsgleichung an.

b) Bestimme k so, dass die Schargerade parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten verläuft.

c) Berechne die Nullstelle sowie den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse in Abhängigkeit von k.

d) Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden der Schar?

30. Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:

Die Koordinatenachsen und eine Schargerade bestimmen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck im ersten Quadranten mit dem Flächeninhalt 8 FE. (FE = Flächeneinheiten)

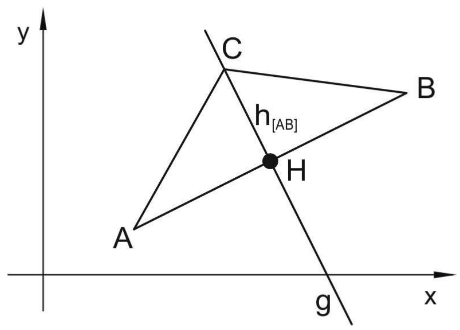
Bestimme die Scharfunktion f in Abhängigkeit von der Nullstelle der Schargeraden mit der x-Achse.

31. Ein Zeichner will die Gerade mit der Gleichung $2x - \frac{1}{3}y + 6 = 0$ durch die Punkte $P_1\left(\frac{2}{3}\middle|7{,}5\right)$ und $P_2\left(\frac{1}{3}\middle|20\right)$ ziehen. Liegen die Punkte auf der Geraden?

32. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit $A(2|1)$.

Die Dreieckshöhe $h_{[AB]}$ liegt auf der Geraden g: $y = -2x + 12{,}5$.

Berechne die Koordinaten des Höhenfußpunktes H. (siehe nebenstehende Skizze).



33. Gegeben sind die Gerade g mit $y + \frac{2}{3}x - 4 = 0$ und der Punkt $P(12|15{,}5)$.
Der Punkt P ist mit g als Spiegelachse mittels Achsenspiegelung auf P' abzubilden.
Berechne die Koordinaten von P'.

34. Die Geraden $g_1 = \overline{AB}$ mit $A(-1{,}5|0)$ und $B(0|3)$ sowie $g_2 = \overline{CD}$ mit $C(0|-2)$ und $D(6|0)$ als auch $g_3 = \overline{EF}$ mit $E(8|1)$ und $F(2|9)$ sind gegeben.

Ermittle zeichnerisch **und** rechnerisch die Punkte $S \in g_1$ und $T \in g_2$ deren Verbindungsstrecke [ST] zu g_3 parallel verläuft und 6 cm lang ist.
(Koordinatensystem: 1LE = 1cm)

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

35. Der Neigungswinkel einer Geraden g beträgt 60°. Auf ihr liegt der Punkt $P(-4\,|\,0{,}5)$.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf (keine Näherungswerte).

b) Berechne die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen.

c) Wie heißt die Funktion h mit derselben Nullstelle, deren Graph die Steigung $m = -\frac{1}{5}$ hat?

36. Gegeben ist die Gerade $g:\ y = -x + 2;\quad D = \mathbb{R}$

Durch den Punkt $P(1\,|\,1) \in g$ soll eine Gerade h gelegt werden, die mit der Geraden g einen Winkel von 30° bildet. Wie lautet die Gleichung der Geraden h ?
(zwei Möglichkeiten)

37. Gegeben sind ein Achsenschnittpunkt $N(-3\,|\,0)$ einer Geraden und der Abstand $\overline{NT} = 5$ der beiden Achsenschnittpunkte.

Berechne die Koordinaten des zweiten Achsenschnittpunktes T und stelle die Gleichung der Geraden auf (2 Möglichkeiten).

38. Gegeben ist die Scharfunktion $f_t(x) = tx - |t|;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_f = \mathbb{R}$

a) Welche Nullstellen haben die Scharfunktionen?

b) Für welche Werte von t schneiden sich zwei Schargeraden auf der y-Achse?

39. Gegeben ist die Scharfunktion $g_a(x) = |a|x + a;\quad a \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Welche Nullstellen hat diese Schar?

b) Für welche Werte von a sind zwei Geraden aus der Schar zueinander parallel?

40. Gegeben ist die Scharfunktion $g_t(x) = -tx + t;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Zeige, dass alle Graphen der Schar eine gemeinsame Nullstelle haben.

b) Bestimme den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der y-Achse und zwei zueinander senkrechten Schargeraden begrenzt ist.

c) Für welches t schließt die Schargerade mit der y-Achse einen Winkel von 30° ein?

41. Die beiden Achsenschnittpunkte jeder Schargeraden haben voneinander den Abstand 10 LE.

Bestimme die Gleichungen aller Geraden. Zeichne eine dieser Geraden.

42. Gegeben sind die Punkte $A(-4\,|\,-3);\ B(4\,|\,-3);\ C\left(x\,\middle|\,\sqrt{25-x^2}\right)$

Die beiden festen Punkte A, B und der variable (von x abhängige) Punkt C bestimmen ein Dreieck. Ermittle den Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ bei C.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

43. Gegeben ist die Scharfunktion $f_t(x) = t\,x + 2\sqrt{t^2+1}; \quad t \in \mathbb{R}; \quad D = \mathbb{R}$

a) Für welches t ist der Graph parallel zur Winkelhalbierenden des 1.Quadranten?

b) Für welches t ist der Graph senkrecht zu einer Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 350$?

c) Welche Graphen der Schar schließen mit der x-Achse einen Winkel von 60° ein?

d) Bei welchen t-Werten sind die Nullstellen vom Ursprung $2\sqrt{2}$ entfernt?

e) Welche Bereiche der x-Achse sind keine Nullstellen von Schargeraden?

f) Bestimme die Entfernung d, die die beiden Achsenschnittpunkte der Geraden zum Parameterwert $t = 5$ haben.

g) Bestimme die Entfernung der Achsenschnittpunkte einer Schargeraden allgemein.

h) Für welches t beträgt die Entfernung der Achsenschnittpunkte genau 4 LE?

i) Zeichne die zu $t \in \{0; \pm 0,2; \pm 0,5; \pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ gehörenden Graphen.